Белгородский государственный национальный
исследовательский университет

На правах рукописи

Лам Тан Фат

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПЕРЕНОС ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ В ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ СРЕДАХ

Специальность: 01.04.07 – физика конденсированного состояния

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Ю.П.Вирченко

Белгород – 2017

АННОТАЦИЯ

В работе, на основе представления о том, что перенос тепла в твердом теле осуществляется, как посредством присущей среде собственной теплопроводности, так и посредством переноса тепла посредством распространения в среде электромагнитного излучения (радиационный теплообмен), порождаемого тепловыми флуктуациями атомов (ионов) твердотельной среды (диэлектрической и полупроводящей), изучается распространение стохастического электромагнитного поля в оптически полупрозрачной твердотельной среде. С этой целью, конструируется и изучается стохастическая модель *флуктуационной неравновесной термодинамики* электромагнитного поля, основанные на стохастических уравнениях Максвелла с аддитивным шумом, который описывает микроскопические флуктуации электрических токов и зарядов в среде. На основе теоретического положения, называемого *флуктуацинно-диссипационной теоремой*, модель реализована в виде бесконечномерного процесса Орнштейна-Уленбека. В рамках сконструированной модели вычисляется плотность потока энергии флуктуационного электромагнитного поля в виде функционала от распределения температуры в среде. Это позволяет сформулировать замкнутое эволюционное уравнение для распределения температуры, которое модифицирует аналогичные эволюционное уравнение, полученное на основе геометрической оптики.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

гауссовское случайное поле
геометрическая оптика
закон Бугера-Ламберта-Бера
закон Кирхгофа
закон Стефана-Больцмана
корреляционная функция
коэффициент отражения
оптическая толщина
оптический показатель
перенос излучения
полупрозрачная среда
процесс Орнштейна-Уленбека
распределение температуры
соленоидальное поле
стохастическая изотропия
стохастическая однородность
радиационный теплоперенос
уравнения Максвелла
флуктуация
электромагнитное поле

Список обозначений

В работе мы придерживаемся следующих правил при употреблении шрифтов для обозначения математических объектов и операций над ними.

Для обозначения стандартных функций (операторов, функционалов и т.д.), для которых в математике имеются устоявшиеся аббревиатуры на основе букв латинского алфавита, мы употребляем шрифт «roman».

В остальных случаях мы, вводя обозначения, руководствуемся следующими положениями:

• для обозначения математических структур используется ажурный шрифт, например, $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots$;

• для обозначения числовых величин (параметров, функций и их аргументов), принимающих значения в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, используются строчные буквы греческого алфавита, а также следующие строчные буквы латинского в шрифте «italic»: a, b, c, f, g, h, p, q, r, s, t;

• кроме того, строчные буквы $i, j, \ldots, n$ в шрифте «italic» обозначают целые числа;

• векторы в $\mathbb{R}^3$ обозначаются жирными буквами латинского шрифта;

• знак тильда, поставленный над любым математическим объектом, указывает на его случайность;

• математические ожидания случайных величин $\tilde{(\cdot)}$ обозначаются посредством двойных угловых скобок $\langle\!\langle \tilde{(\cdot)} \rangle\!\rangle$.

- $a(\mathbf{x}, t; T)$ – амплитуда флуктуаций плотности электрического тока
- c – скорость света в вакууме
- $\bar{c} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$
- $\mathrm{c_v}$ – теплоемкость при постоянном объеме
- $C_{ijkl}(T)$ – тензор модулей упругости
- $\mathbf{E}$ – электрическая составляющая электромагнитного поля
- $\bar{\mathbf{E}}$ – пространственный фурье-образ поля $\mathbf{E}$
- $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ – полный фурье-образ поля $\mathbf{E}$
- f – функция распределения фотонов по частотам
- $\mathbf{H}$ – магнитная составляющая электромагнитного поля
- $\bar{\mathbf{H}}$ – пространственный фурье-образ поля $\mathbf{H}$
- $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ – полный фурье-образ поля $\mathbf{H}$
- $\hbar$ – постоянная Планка
- $I_0[\mathbf{x}, t; T]$ – интенсивность теплового излучения
- $\mathbf{j}$ – плотность электрического тока
- $\boldsymbol{j}$ – флуктуации плотности электрического тока
- $\bar{\mathbf{j}}$ – пространственный фурье-образ флуктуаций плотности электрического тока
- k – постоянная Больцмана
- $\mathbf{k}$ – волновой вектор
- $K_{jk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$ – корреляционная функция значений случайного поля
- $\bar{K}(\mathbf{k})$ – пространственный фурье-образ корреляционной функции
- $K = r_0^{-3} R Q_0 / 4\pi\bar{c}^2$
- $l[\Gamma]$ – длина луча Γ
- $\bar{L}$ – масштаб длины, характеризующий градиент температуры
- $m[\Gamma]$ – направляющий вектор луча Γ
- $n[\Gamma]$ – число точек отражения луча Γ от границы
- Q – стандартная корреляционная функция
- Q_0 – максимальное значение корреляционной функции

- r – модуль радиус-вектора
- r_0 – радиус корреляций флуктуаций зарядов и токов в среде
- $R = 4\pi\bar{c}^2/\varepsilon$
- $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ – плотность потока энергии флуктуаций электромагнитного поля
- $T(\mathbf{x}, t)$ – значение температуры в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t
- t – момент времени
- $u_{ij}(\mathbf{x}, t)$ – тензор деформаций среды в точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$
- $\mathbf{x}$ – радиус-вектор пространственной точки
- $\alpha_{ij}(T)$ – тензор коэффициентов теплового расширения
- γ – декремент затухания электромагнитного излучения в среде
- δ_{ij} – символ Кронекера
- $\delta(\cdot)$ – функция Дирака
- ϵ_{ijk} – символ Леви-Чивита
- ε – диэлектрическая проницаемость
- Θ – функция Хевисайда
- ϑ – коэффициент отражения луча от границы
- $\boldsymbol{\iota}$ – полный фурье-образ флуктуаций плотности электрического тока
- $\varkappa_{ij}$ – тензор коэффициентов теплопроводности среды
- μ – магнитная проницаемость
- ρ – плотность электрического заряда
- ϱ – полный фурье-образ флуктуаций электрического заряда
- $\bar{\rho}$ – пространственный фурье-образ плотности электрического заряда
- σ – электропроводность
- ς – постоянная Стефана-Больцмана
- $\Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ – тензор механических напряжений в точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$
- $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ – случайное гауссовское поле для описания флуктуаций тока

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Как известно, теплоперенос в сплошных средах осуществляется посредством конвекции, теплопроводности и посредством тепловой радиации. Настоящая диссертационная работа посвящена теоретическому изучению вклада радиационного теплообмена в теплоперенос в твердотельных полупрозрачных диэлектрических и полупроводниковых средах. При радиационном теплообмене передача тепла от одного физически малого объема среды к другому происходит посредством электромагнитного излучения, которое порождается объемом среды, передающем тепло, и поглощается объемом, принимающем эту переданную тепловую энергию. Такой механизм передачи тепла осуществляется как в оптическом диапазоне частот (в его более низкочастотной части), так и в инфракрасной области спектра. При температуре окружающей среды вклад радиационного теплообмена в перенос тепла очень мал по сравнению с передачей тепла посредством теплопроводности так, что этим эффектом при расчете тепловых процессов обычно пренебрегают. Более того таким механизмом передачи тепла пренебрегают в случае сред, обладающих сильным поглощением электромагнитного излучения в указанной области спектра. Однако, с повышением температуры, этот механизм играет все бо́льшую роль и его вклад в теплоперенос быстро возрастает. В условиях сильной разогретости образца твердотельной среды, он оказывает существенное влияние на теплообмен в твердотельной полупрозрачной среде. Очень быстрое возрастание вклада радиационного теплообмена с повышением температуры T единицы объема твердотельной среды связано с быстрым возрастанием интенсивности излучения ($\sim T^4$) с ростом температуры. При этом возрастание радиационного теплообмена видоизменяет как стационарные распределения температуры в ограниченных образцах твердотельной среды при конкретных тепловых условиях на их границах, так и тип временно́й эволюции неравновесных распределений температуры в них, когда эти распределения релаксируют к соответствующим им равновесным состояниям.

Физические условия, при которых становится необходимым учет радиационного теплообмена в полупрозрачных средах, реализуется, например, в технологических процессах выращивания монокристаллов (например, методом Чохральского см., например, [77]-[79]) из химических соединений, которые, в типичной температурной ситуации, являются твердотельными диэлектриками (или высокоомными полупроводниками), оптически полупрозрачными в видимом диапазоне частот электромагнитного изучения, то есть обладает в этой области спектра большой длиной поглощения. Тогда в образце растущего кристалла, разогретого до очень высоких температур ($\sim 1000 \div 2000$К) возникают значительные градиенты температуры ($\sim 10 \div 100$ К/см), и на передачу тепла от более нагретых его участков к менее нагретым оказывает существенное влияние радиационный теплообмен. В связи с этим, для проведения расчетов устойчивых режимов выращивания монокристаллов, при которых в их объеме не возникает критических градиентов температуры, важно иметь количественную теорию, наиболее адекватно описывающую возникающую физическую ситуацию. Эволюционное уравнение для описания теплопереноса в твердотельной среде, в пренебрежении эффектом ее теплового расширения, записывается в виде

$$\mathrm{c_v}(T)\dot{T} = \nabla_i \varkappa_{ij}(T) \nabla_j T - (\nabla, \boldsymbol{S})\,, \tag{0.1}$$

где $T(\mathbf{x}, t)$ – значение распределения температуры в среде в пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в момент времени t, $\varkappa_{ij}(T)$ – зависящий от температуры тензор коэффициентов теплопроводности среды, $\mathrm{c_v}(T)$ – ее объемная теплоемкость при постоянном объеме. [1)] Это уравнение представляет собой запись первого начала термодинамики для неравновесных термодинамических состояний, то есть оно описывает баланс энергии в физически малом объеме, сосредоточенном около точки $\mathbf{x}$. В уравнении (0.1), по сравнению со стандартным уравнением теплопроводности, добавлено слагаемое $-(\nabla, \boldsymbol{S})$, описывающее убывание плотности потока $\boldsymbol{S}$ энергии электромагнитного излучения проходящего через пространственную точку $\mathbf{x}$, которое затрачивается на нагрев малого объема среды, сосредоточенного около этой точки. Таким образом, для построения замкнутой в математическом смысле теории теплопереноса с учетом радиационного теплообмена, необходимо указать метод расчета векторного поля $\boldsymbol{S}$ по заданному мгновенному распределению температуры $T(\mathbf{x}, t)$, то есть предложить теорию, на основе которой был бы возможен расчет этого поля в виде функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ от распределения температуры $T(\mathbf{x}, t)$ имеющемуся в образце, в тот же самый момент времени t. Настоящая диссертация посвящена разработке метода вычисления функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ в рамках теории радиационного теплообмена, с целью дальнейшего его применения для проведения расчетов стационарных распределений температуры и прогнозирования эволюционных режимов для нестационарных распределений.

[1)] Подробному обоснованию этого уравнения, равно как и истории развития теории радиационного теплообмена посвящен раздел 1.1 первой главы.

Несмотря на имеющиеся к настоящему времени методы расчета функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ (см. раздел 1.1), все они обладают принципиальным, с теоретической точки зрения, недостатком. В их конструкцию не входит собственно тепловое электромагнитное поле. В связи с этим, в диссертации строится оригинальная теория, в рамках которой этот конструкционный недостаток устраняется, в чем и состоит научная новизна предлагаемого в нами метода.

Используемые в настоящее время на практике методы расчета не определяют вид функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ аналитически в рамках разумной теории возмущений по малому параметру. Предлагаемая в диссертации теория позволяет найти явный аналитическое выражение для этого функционала, и это положение выгодно отличает ее от имеющихся в настоящее время методов расчета, посредством которых значения дивергенции этого функционала вычисляются численно. Аналитическое определение выражения сильно упрощает как численное решение эволюционных задач теплопереноса на основе уравнения (1), так и определение равновесных распределений температуры при фиксированных тепловых условиях на границе образца. Основой разрабатываемого в диссертации метода является подход на основе статистической теории флуктуаций теплового электромагнитного поля. В связи с чем, математический метод проводимого в ней исследования, связан с применением *случайных электромагнитных полей*, описывающих их тепловые флуктуации. Более полное обсуждение исторических предпосылок и вытекающей из них актуальности настоящего исследования даются в гл. 1, разд. 1.1.

Целью работы является:

Теоретическое изучение физической природы свойств неорганических и органических соединений, диэлектриков в твердом состоянии в зависимости от их температуры (что находится в соответствии с п.1 паспорта специальности).

Разработка и исследование математических моделей для прогнозирования изменения теплового состояния твердотельных полупрозрачных диэлектриков с учетом переноса тепла излучением. (что находится в соответствии с п.5 паспорта специальности).

В работе разрабатываются, на основе неравновесной термодинамики тепловых флуктуаций, методы теоретического расчета переноса тепла излучением в сильно разогретых диэлектриках, полупрозрачных в красной и инфракрасной областях спектра, при наличии внутри них значительных перепадов температуры.

Задачи исследования. Исходя из указанной общей цели исследования, в диссертации решались следующие задачи:

1. Дать общефизическое описание механизма переноса тепла излучением в твердотельной среде.
2. Разработать общую теоретическую модель для описания переноса тепла излучением, порождаемым тепловыми флуктуациями твердотельной среды.
3. Выделить тип твердотельных сред и те физические условия, для которых флуктуационный механизм переноса тепла излучением оказывает существенное влияние на эволюцию их теплового состояния.
4. Для выделенных физических условий и сред разработать математический аппарат для построения и анализа систем неравновесной термодинамики флуктуаций, описывающих перенос тепла излучением, а также построить конкретную стохастическую модель для описания этого явления.
5. В сконструированной модели выделить малые параметры, позволяющие проводить асимптотически точные аналитические вычисления характеристик переноса тепла излучением.
6. На основе сконструированной модели, используя выделенные малые параметры, вывести эволюционное уравнение для распределения температуры при выделенных физических условиях.

Научная новизна. В результате проведенного исследования создан общий подход для решения задач флуктуационной неравновесной термодинамики процессов переноса тепла изучением в твердотельных средах. В рамках развитой в диссертации теории научную новизну составляют:

1. В рамках термодинамических представлений, с привлечением представлений геометрической оптики, выведено общее уравнение теплопереноса в полупрозрачной твердотельной среде при наличии в ней радиационного теплообмена и с учетом источника тепла, который порождается ее упругими деформациями, вызванными сильной пространственной неоднородностью нагрева.
2. Показано, что медленная эволюция деформаций полупрозрачной среды, вызванных неоднородностью нагрева с большим перепадом температур, не оказывает существенного влияния на теплоперенос в среде вследствие медленности эволюции ее теплового состояния.

3. Предложена теоретическая модель в виде стохастических уравнений Максвелла со стохастическим источником, связанным с локальными флуктуациями электрических зарядов и токов на пространственных масштабах порядка 10^{-6}см, которая описывает флуктуационный механизм генерации теплового электромагнитного излучения и его переноса в полупрозрачной твердотельной среде.
4. Выделен класс веществ, обладающих такими физическими характеристиками, которые позволяют применить для описания происходящего в них радиационного теплопереноса предложенную теоретическую модель. Эти вещества являются диэлектриками и высокоомными полупроводниками, полупрозрачными в красной и инфра-красной областях спектра и имеющими большую температуру плавления, порядка $1500° \div 2000°$C.
5. Показано, что для образцов диэлектриков из выделенного класса веществ с линейными размерами порядка $1 \div 10^2$см при наличии в этих образцах больших перепадов температуры порядка 100°C/см развитая в работе флуктуационная теория радиационного теплообмена приводит к уравнению теплопереноса, которое является модификацией аналогичного уравнения, сконструированного на основе теории переноса излучения, учитывающей рассеяние электромагнитной энергии. Это уравнение справедливо в широком диапазоне температур $400° \div 1000°$C.
6. Наряду с этим, показано, что в случае веществ из выделенного класса, которые являются высокоомными полупроводниками, предложенная флуктуационная модель приводит к такому же уравнению теплопереноса, в более узком диапазоне температур, и при температурах порядка $400° \div 500°$C.
7. На основе полученного уравнения теплопереноса показано, что в условиях, когда образец среды из выделенного класса веществ разогрет до больших температур и при наличии в нем больших перепадов распределения температуры, вклады в эволюцию распределения температуры от радиационного переноса тепла и от переноса тепла посредством механизма теплопроводности становятся сравнимыми.
8. Дано описание всех флуктуационных тепловых электромагнитных полей малой интенсивности в диатермической среде, которые обладают нулевым средним значением, стохастически однородных, изотропных и стационарных и которые обладают стохастически независимыми и эквивалентными электрической и магнитной составляющими.

Теоретическая и практическая значимость. Разработанные в диссертации методы представляют как теоретическую ценность, с точки зрения развития неравновесной термодинамики твердотельных сред, так и прикладную ценность, ввиду того, что, на их основе, могут прогнозироваться процессы перераспределения тепла в твердотельных полупрозрачных средах при наличии в них значительных перепадов температуры.

Методология и методы исследования. В процессе решения поставленных задач используются теоретические методы и представления статистической физики, электродинамики и теории твердого тела. Для конструирования адекватных математических моделей и их исследования используются методы математического анализа теории случайных гауссовских процессов, а также методы тензорного анализа и теории обобщенных функций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Общее уравнение теплопереноса в твердотельной среде с учетом наличия в ней упругих деформаций, вызванных пространственной неравномерностью ее нагрева и при наличии радиационного теплообмена.
2. Стохастическая модель электромагнитного поля в среде с флуктуационным тепловым источником, интенсивность которого зависит от текущего распределения температуры.
3. Кинетическое уравнение теплопереноса с учетом радиационного теплообмена в полупрозрачных твердотельных диэлектриках при наличии больших градиентов температуры, полученное в рамках неравновесной термодинамики тепловых флуктуаций.
4. Описание флуктуационных тепловых электромагнитных полей малой интенсивности в диатермической среде, которые обладают нулевым средним значением, стохастически однородных, изотропных и стационарных и которые обладают стохастически независимыми и эквивалентными электрической и магнитной составляющими.

Апробация работы.

Материалы, включенные в диссертацию, опубликованы в 14 работах автора, как самостоятельных, так и выполненных совместно с научным руководителем, а также в материалах 6 международных научно-технических конференций. Опубликованные работы, материал которых включен в диссертацию, вышли из печати на протяжении 2013-2017гг. и представлены в общем списке литературных источников, на которые имеются ссылки в диссертации.

Материалы работы докладывались и обсуждались на:

1. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород, Россия.
2. Международной конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2014», Воронеж, Россия.
3. Международная конференция по математическому моделированию Херсон, Железный порт – 2014, Украина.
4. XII of young scientists school "Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics", KBR, Terskol 3-7 December 2014.
5. Международной конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2016», Воронеж, Россия.
6. Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики», 17-21 октября 2016, Нальчик-Терскол, КБР, Россия.

Структура и содержание работы. Диссертация состоит из настоящего введения, четырех глав, заключения, списка литературы, который содержит 106 наименований и приложения. Каждая глава делится на разделы. В каждой главе и в каждом разделе принята своя нумерация формул. Таким образом нумерация их является тройной: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на номер формулы в пределах главы и раздела, указанных первыми двумя цифрами. Однако, при ссылках на формулы в пределах текущей главы, первая цифра опускается, точно также как при ссылках в пределах текущего раздела опускаются две первых цифры.

Ссылки на литературу даны заключенными в квадратные скобки номерами соответствующих литературных источников из приложенного в конце диссертации списка. В этом списке указаны только те источники, на которые даются ссылки в тексте. Нумерация литературных ссылок построена в порядке их появления в тексте диссертации.

Мы придерживаемся в работе единой для всего текста системы обозначений. Принципы ее построения приводятся в отдельном списке. Для удобства чтения работы, формулировки всех основных результатов, а также даваемые по ходу изложения точные определения понятий выделены наклонным шрифтом.

Первая глава посвящена описанию научного направления, к которому относится диссертация и постановке возникающих в рамках этого направления задач. Излагаются исторические предпосылки к созданию теории радиационного теплообмена в полупрозрачных твердотельных средах. Описан микроскопический физический механизм радиационного теплообмена, благодаря которому радиационный теплообмен в твердотельных средах существенно отличается от лучистого теплообмена в жидкостях и газах. Описываются трудности теоретического микроскопического изучения этого явления радиационного теплообмена. Получено общее уравнение теплопереноса в твердотельных полупрозрачных средах при наличии больших градиентов температуры с учетом возникновения нелинейных упругих деформаций, вызванных пространственной неравномерностью нагрева среды. В этой же главе, в общих чертах, описываются основы теоретического подхода к описанию радиационного теплообмена в рамках так называемой теории переноса излучения. Предложен усовершенствованный вариант этой теории для расчета плотности потока энергии электромагнитного поля, переносящего тепло в полупрозрачной твердотельной среде.

Во **второй** главе приводятся физические основания предлагаемой в работе *флуктуационной теории*, то есть излагаются основные феноменологические представления о радиационном теплообмене в различных твердотельных средах. В частности, проводится анализ тех физических характеристик диэлектриков и высокоомных полупроводников, которые имеют непосредственное отношение к радиационному теплообмену в них, а также анализируются те физические условия, при которых радиационный теплообмен оказывает существенное влияние на тепловые процессы в твердотельных средах. В этой главе вводится понятие о тепловом электромагнитном поле, благодаря которому осуществляется радиационный теплообмен и ставится задача об описании этого явления на основе уравнений Максвелла, излагается общая идея построения математической основы предлагаемой в работе флуктуационной теории радиационного теплообмена и ее математическая конструкция. Кратко описан математический аппарат, на основе которого формулируется флуктуационная теория радиационного теплообмена и исследуются конкретные ее математические модели. Далее, строится конкретная математическая модель стохастического электромагнитного поля в твердотельном диэлектрике, которое моделирует электромагнитное поле, порождаемое тепловыми флуктуациями зарядов и электрических токов в диэлектрической среде. Для этой модели доказывается существование квазистационарного эволюционного режима, при котором допустимо использование изучения радиационного теплопереноса в предположении о мгновенном локальном термодинамическом равновесии электромагнитного поля, порождаемого тепловыми флуктуациями среды.

Третья глава является центральной с точки зрения получения нового теоретического результата в теории радиационного теплообмена в полупрозрачных твердотельных средах. В ней реализуется флуктуационный подход для реального объемного образца диэлектрической полупрозрачной твердотельной среды. Вычисляется плотность потока энергии электромагнитного поля, порождаемого тепловыми флуктуациями среды.

В **четвертой** главе дано описание всех стохастических гауссовских электромагнитных полей с нулевым средним значением, которые: имеют статистически независимые и эквивалентные электрическую и магнитную составляющие, являются стохастически однородными и изотропными по пространственным переменным, а также стохастически стационарными по времени.

В **заключении** перечислены результаты проведенного в диссертации исследования.

Глава 1. Описание радиационного теплообмена в рамках теории переноса излучения

В этой главе мы кратко изложим исторические предпосылки к созданию *флуктуационной теории* радиационного теплообмена в полупрозрачных твердотельных средах, которая является основной темой исследования настоящей работы. Далее будут изложены феноменологические представления о радиационном теплообмене и будет описан на качественном уровне микроскопический физический механизм, благодаря которому этот теплообмен осуществляется в твердотельных средах. Мы опишем кратко основы теории радиационного теплообмена на основе так называемой теории переноса излучения. Кроме того, в этой главе находится общий вид корреляционной функции флуктуирующего электромагнитного поля с учетом его соленоидальности.

1.1. Развитие теории радиационного теплообмена в твердотельных средах

После установления Дж.Максвеллом [1] базовых уравнений, описывающих всю совокупность известных к тому времени электродинамических явлений, были поставлены ряд принципиальных вопросов электродинамики. Одним из них являлся вопрос о физических механизмах излучения и поглощения электромагнитных волн материальными средами. Естественно, что, в то время, речь шла о процессах излучения и поглощения света. В рамках общефизических представлений, с макроскопической точки зрения, ответ на этот вопрос уже был дан к тому времени в виде законов Кирхгофа (по этому поводу см., например, [2]) и Бугера [3] (см. также [4]-[6]) еще до выхода в свет трактата Дж.Максвелла. В первом из этих законов, полученном на основе общефизических рассуждений в рамках классических представлений, дается соотношение между интенсивностями излучения и поглощения света малым объемом среды. Второй закон дает зависимость поглощения света полупрозрачной средой от глубины его проникновения в среду. Эти законы легли впоследствии в основу теории переноса тепла в сплошных средах посредством излучения (радиационный теплообмен), которая дает возможность вычислять плотность потока тепла $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ в каждой пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$ среды, связанную с переносом в этой среде электромагнитного излучения. При этом, для построения замкнутой теории, оказывается необходимой излучательная интенсивность $I_0[\mathbf{x}, t; T]$ каждого физически малого объема среды, сосредоточенного около пространственной точки с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в момент времени t. В ранних работах (см., например, [7], [8], [80]) по теории радиационного теплообмена в средах, в которых использован подход, основанный на теории переноса излучения, интенсивность $I_0[\mathbf{x}, t; T]$ принималась равной $I_0[\mathbf{x}, t; T] = \varsigma T^4(\mathbf{x}, t)$, согласно закону излучения Стефана-Больцмана [9] (см. также [5], [6]), что впоследствии было названо приближением «серой среды» (см., например, [10]).

На основе базовых физических законов, которые описывают взаимодействие электромагнитного излучения в красной и в инфракрасной областях спектра излучения, а именно,[2] законов Кирхгофа, Бугера и Стефана-Больцмана,ҷ была построена замкнутая математическая схема, называемая теорией переноса теплового излучения, которая позволяет вычислить часть плотности потока тепла $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$, связанную с переносом тепла излучением. Она является основой для различных практических применений, где возникает необходимость учета радиационного теплообмена при расчете тепловых процессов в полупрозрачных сплошных средах. В рамках теории переноса излучения, на основе представлений геометрической оптики, конструируется кинетическое уравнение на основе учета баланса поглощения и излучения фотонов в малых объемах среды. Математическая теория переноса тепла излучением как в сплошной среде, так и между разогретыми поверхностями разделенными *диатермической средой*, основанная на этой схеме, является в настоящее время довольно хорошо разработанной. Ее математические методы и полученные в ее рамках результаты отражены во многочисленных монографиях (см., например, [10]-[14]).

Заметим, однако, что в рамках серого приближения, излучательная интенсивность $I_0[\mathbf{x}, t; T]$ принимается независящей от частоты излучения. Дальнейшее развитие теории показало, что в ряде случаев ограничение теории только «интегральными» интенсивностями излучения, независящими от частоты, является недостаточным. Практическое применение теории радиационного теплообмена к задачам о переносе тепла в полупрозрачных, сильно разогретых, твердотельных средах потребовало отказа от применения серого приближения (см., например, [15]). Это привело к необходимости теоретического определения излучательной интенсивности в виде

[2] Это существенно, так как в твердотельной среде возможно собственное излучение в других частях спектра, которое переносится в среде, например, люминесценция, но которое не переносит тепла. Кроме того, тот факт, что тепло переносится посредством излучения с длинами волн, соответствующими красной и инфракрасной областям спектра, связано с тем, что волны именно с такими длинами резонируют с твердотельной структурой.

функции, зависящей от частоты теплового излучения ω как от параметра. Ясно, что нахождение явного вида такой функции возможно только на основе использования более глубокого микроскопического подхода к исследованию явлений испускания и поглощения электромагнитных волн атомами среды. Таким образом, теория радиационного теплообмена оказалась тесно связанной с фундаментальной проблемой теоретической физики, решение которой привело к революционным изменениям физических представлений, произошедших в течение 20-го столетия и связанных с квантованием электромагнитного излучения. Как известно, именно серия работ, ставших теперь классическими, как экспериментальных, так и теоретических, посвященных исследованию электромагнитного излучения, порождаемого разогретой твердотельной средой, привели в начале 20-го столетия к возникновению квантовомеханических представлений. (см., например, [16]). [3)] В рамках таких представлений, на основе методов статистической физики, стало возможным определение функции распределения $f(\hbar\omega/\mathrm{k}T(\mathbf{x},t))$ (k – постоянная Больцмана) по частотам фотонов, излучаемых физически малыми объемами среды, находящимися в состоянии локального термодинамического равновесия с определенной мгновенной температурой $T(\mathbf{x},t)$, не только в случае идеализированной модели абсолютно черного тела, но и в случае реальных сред. Функция же распределения $f(\hbar\omega/\mathrm{k}T(\mathbf{x},t))$ позволяет определить зависящую от частоты интенсивность излучения, в виде среднего значения энергии $E(\omega)$ излучаемых фотонов [15].

Использование в теории радиационного теплообмена некоторой модельной функции распределения f по энергии фотонов дает возможность учета зависимости интенсивности излучения от частоты и, тем самым, построение более реалистичных теоретических моделей по сравнению моделями, которые основаны на сером приближении. Однако, такой подход является недостаточно последовательным с микроскопической точки зрения. Представляется, что более последовательная теория должна быть основана на идеях и методах неравновесной статистической механики в квантовой теории твердого тела. В самом деле, используемые в теории модельные функции распределения $f(\hbar\omega/\mathrm{k}T(\mathbf{x},t))$ конструируются на основе информации об излучении и поглощении фотонов отдельными невзаимодействующими атомами и никак не связаны с кинетическим уравнением переноса излучения, составленным только из соображений баланса потоков излучения, распространяющихся в среде по законам и геометрической оптики. Напротив,

[3)] См. также [17]-[22] и имеющиеся там ссылки на экспериментальные работы .

реальная функция распределения $f(\hbar\omega \,/\, \mathrm{k}T(\mathbf{x},t))$ может быть определена только на основе составления соответствующего кинетического уравнения для неравновесной системы фотонов и фононов в твердотельной среде, в которой происходит радиационный теплообмен, в виде его термодинамически локально равновесного решения. При этом наличие фононов, связано с пребыванием среды в твердом состоянии, оказывается существенным, так как при их отсутствии в газообразной среде или в среде, находящей в жидком состоянии, перекачки энергии фотонов в тепловую энергию среды не происходит.

При составлении указанного выше кинетического уравнения должны быть явным учтены образом характеристик взаимодействия фотонов с атомами среды. Так как гамильтониан квантовой системы атомов среды взаимодействующих между собой и с газом фотонов не содержит явным образом слагаемых, ответственных за взаимодействие фотонов и фононов, то при составлении кинетического уравнения возникает сложность в правильном выборе вида соответствующих амплитуд взаимодействия, которые связаны с перекачкой энергии электромагнитного излучения в энергию тепловых колебаний атомов среды. Тогда, для построения последовательной кинетики системы «среда + излучение», необходимо, предварительно, на основе гамильтониана системы, получить модельный гамильтониан для системы «фононы среды + фотоны». Как раз вывод такого модельного гамильтониана, адекватного изучаемой физической ситуации, оказывается довольно сложной задачей в связи с сложностью механизма [4)] процессов превращения фотонов в тепловые фононы. Сделанные в этом абзаце утверждения не противоречат тому, что в теории радиационного теплообмена существует подход, в рамках которого кинетическое уравнение для переноса излучения составляется в терминах фотонов (см., например, [11]), так как при этом не производится реального квантования электромагнитного поля и поля упругих колебаний твердотельной среды. Термин «фотон» при этом используется только лишь как термин для описания порционного переноса излучения, а описание процессов рождения и поглощения фотонов в теории отсутствуют.

На следующем этапе развития теории, ввиду указанной выше сложности построения теории радиационного теплообмена, описывающей на микроскопическом уровне процессы перекачки энергии излучения в тепловую

[4)] Эти процессы нелокальны во времени с характерным временны́м масштабом порядка времени жизни атома среды в возбужденном состоянии при поглощении им фотона (см. подробнее в разд. 1.2) энергию среды, было предложено описывать обмен энергией между излучением и средой на основе полуфеноменологического подхода, в терминах флуктуаций макроскопических переменных, не переходя при описании динамики среды к микроскопическим переменным, которые характеризуют состояния каждого из ее атомов. При этом тепловое электромагнитное поле в среде, естественным образом, должно также быть введено явным образом в теорию. Такой подход был предложен в работах С.М. Рытова с сотрудниками. Мы будем в дальнейшем называть его флуктуационным подходом и теорию радиационного теплообмена, построенную в рамках этого подхода, будем называть флуктуационной теорией. Наиболее отчетливо эта идея была сформулирована в монографии [23] (см. также развитие этой идеи в монографиях [24],[25]), хотя ее появлению предшествовала длительная идейная эволюция (см. [26]-[29]). К сожалению, развитие этого направления в теории радиационного теплообмена происходило очень медленно. Это связано, во-первых, с тем, что те физические ситуации, к которым могли быть применены ее результаты, являются довольно исключительными, а, во-вторых, математическая техника, которая необходима для реализации той основной идеи, на которой основана теория, как правило, не входит в подготовку физика-теоретика, специализирующегося в области статистической физики. Физики-теоретики стали интенсивно интересоваться задачами, при решении которых востребован такой математический аппарат, только лишь в 80-е годы прошлого столетия (см., например, [30], [31]).

Интерес к задачам, связанным с расчетом теплопереноса в сильно разогретых полупрозрачных средах проявился, естественным образом, при развитии технологий выращивания кристаллов из расплавов диэлектрических сред и полупроводниковых материалов. Мы здесь не будем останавливаться на многочисленных работах, в которых производилось компьютерное моделирование эволюции неравновесных температурных распределений без физического анализа с целью приложения для усовершенствования технологии выращивания монокристаллов. Укажем только на серию теоретических работ, связанных с решением прикладных задач [32]-[35]. Все указанные исследования, как компьютерное моделирование, так и теоретические исследования были выполнены в рамках традиционного подхода, основанного на теории переноса излучения.

Наконец, укажем, что появился цикл работ, посвященный развитию флуктуационного подхода. В этих работах была предложена и изучалась теоретическая модель, в которой флуктуирующей физической характеристикой среды являлась ее электрическая восприимчивость [36]-[50]. В настоящей работе, в рамках флуктуационного подхода, мы строим другую стохастическую модель переноса теплового излучения, в которой предполагаются флуктуирующими плотности распределенных зарядов и электрических токов в среде. Она, в отличие от модели, предложенной в [39], [42],[48], основана на явном статистическом описании тепловых флуктуаций зарядов и токов в среде, что является более последовательным с теоретической точки зрения.

1.2. Физический механизм радиационного теплопереноса в твердотельных средах

Для выявления сложностей, с которыми сталкивается построение микроскопической теории радиационного теплообмена, рассмотрим это явление с качественной точки зрения. Наше рассмотрение мы ограничим тем случаем, когда среда является диэлектрической или она является высокоомным полупроводниковым материалом. В этом случае, естественно, характеризовать ее электромагнитные свойства посредством двух величин: диэлектрической проницаемости ε и магнитной проницаемости μ, которые, вообще говоря, являются функциями температуры T.

Будем считать, что твердотельная среда является в достаточной степени упругой. При этом она может быть как кристаллической, так и аморфной. Для определенности рассуждений, будем считать, что она состоит из электрически нейтральных атомов. В то же время, качественная физическая картина переноса тепла излучением не претерпевает существенных изменений, если она составлена из молекул, с ковалентной связью, либо из ионов, связанных между собой электровалентным образом.

Атомы, составляющие среду, совершают хаотические тепловые колебания около своих положений равновесия. Средняя величина этих хаотических колебания возрастает с ростом температуры T. При достаточно большой локальной температуре среды, сравнимой с ее температурой плавления, размах хаотических колебаний атомов становится настолько большим, что он становится сравнимым со средним расстоянием между атомами в твердотельной среде $\sim 1\mathring{A}$. При этом электронные оболочки соседних атомов могут сближаться настолько, что возникает локальное нарушение электронейтральности среды на пространственных масштабах порядка среднего расстояния между атомами.

Положим теперь, что в среде распространяется электромагнитное поле, состоящее из отдельных квантов (фотонов). Каждый из фотонов, обладающий энергией $\hbar\omega$, ω – частота фотона может захватываться и поглощаться каким-либо из атомов среды, с которым встречается по мере своего распространения. При поглощении фотона атом переходит в какое-либо из допустимых для него энергетически возбужденных состояний. Однако, по прошествии некоторого времени релаксации возникшего в результате поглощения фотона возбужденного состояния, атом переходит в исходное состояние и снова излучает фотон, возможно с энергией (частотой), меньшей энергии (частоты) поглощенного фотона, где частота излученного фотона пропорциональна разности соответствующих энергетических уровней. Время релаксации каждого из возбужденных состояний в исходное состояние (время жизни возбужденного состояния) определяется полушириной возбужденного энергетического уровня. Эта полуширина меньше, но сравнима со средним расстоянием между энергетическими уровнями.

При поглощении и излучении фотона атом получает импульс отдачи, который изменяет его динамическое состояние. Излученный атомом фотон распространяется в среде вплоть до поглощения его другим атомом среды, который, таким образом, в свою очередь, становится возбужденным. При этом фотон передает вновь встретившемуся ему атому свой импульс, который может приводит атом к раскачке или торможению также как и при излучении фотона. По прошествии времени релаксации возбужденный атом переизлучает поглощенный фотон, хотя, возможно, с меньшей частотой. После чего, процесс распространения фотона в среде продолжается.

В связи с наличием отдачи атомов при излучении и поглощении фотонов, можно говорить о наличии механизма перекачки энергии как из фотонной подсистемы в фононную, так и обратно. При наличии градиента температуры в среде, переизлучение фотонов атомами в различных пространственных областях среды носит нескомпенсированный характер. А именно, атомы в областях с меньшей температурой поглощают больше энергии фотонов и, соответственно, меньше ее излучают по сравнению с областями, где температура выше. Это положение является, как будет разъяснено ниже, следствием сильной связанности атомов твердого тела друг с другом. Энергия, равная разности между энергиями поглощенных и излученных фотонов переходит в кинетическую энергию неупорядоченных колебаний атомов среды около их положения равновесия. Среднее же значение этой энергии представляет собой температуру той части среды, которая сосредоточена в рассматриваемой малой области. Эта разность энергий равна дивергенции $-(\nabla, \boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T])$ плотности потока энергии, переносимой всей совокупностью фотонов, распространяющихся в среде.

Таким образом, перекачка энергии распространяющего в среде электромагнитного поля в кинетическую энергию хаотических колебаний решетки связана с наличием в гамильтониане системы атомов решетки упругого взаимодействия между атомами (оно может быть связанным с наличием электро- и/или магнитоупругого взаимодействий). Это взаимодействие имеет место даже в том случае, когда атомы среды электронейтральны и магнитный момент каждого из них равен нулю. При наличии такого взаимодействия, вычисление величины $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$, ввиду существенной связи этой величины с кинетикой хаотических колебаний атомов, должно быть основано на представлениях неравновесной статистической механики системы, состоящей из фотонов, распространяющихся в среде и фононов среды. При этом решение такой задачи сводится к составлению кинетического уравнения для фотон-фононной системы и нахождению локально-равновесных решений (для того, чтобы имело смысл говорить о наличии локальной температуры среды). Такой подход к описанию радиационного теплообмена уже на первоначальном шаге, то есть при определении эффективного гамильтониана взаимодействия фотон-фононной системы оказывается крайне сложным для реализации. Это связано с тем, что система атомов должна быть сильно связанной. В противном случае, как это имеет место в газовой среде, поглощение фотона любым из ее атомов с последующим его излучением можно рассматривать как упругое рассеяние на этом атоме. Такое взаимодействие фотонов с атомами среды не приводит к преимущественной перекачке их энергии в тепловую энергию среды. Неупругость же рассеяния фотонов атомами среды происходит вследствие того, что все они сильно связаны в единую систему. При наличии сильной связи, между поглощением и излучением фотона фиксированным атомом проходит время задержки, равное времени релаксации возбужденного атомного состояния, часть энергии фотона, которая была затрачена, при его поглощении, на отдачу атома, успевает перераспределиться между другими атомами из ближайшего его окружения. Поэтому атом, после переизлучения фотона, не возвращается в исходное динамическое состояние, а, фотон действительно переизлучается с частотой, меньшей частоты поглощенного фотона. Возникшая при этом разность превращается в энергию хаотических колебаний атомов среды, то есть переходит в ее тепловую энергию.

Описанный на качественном уровне механизм перекачки энергии излучения в тепловые колебания атомов среды около положений равновесия, благодаря которому в твердотельных средах возможен радиационный теплообмен, довольно сложно описать в терминах эффективного гамильтониана. Заметим также, что, кроме неразработанности теории, на основе которой возможно нахождение явного вида такого гамильтониана, возникает дополнительная сложность, связанная с тем, что он должен существенно зависеть от природы среды. Например, в случае отсутствия электронейтральности атомов решетки, либо при наличии у них собственного магнитного момента, процессы их взаимодействия с электромагнитным излучением существенно усложняются.

В заключение отметим, что, как уже было сказано выше, в газообразной среде и, в значительной мере, в среде, находящейся в жидком состоянии, описанный физический сценарий радиационного теплообмена, практически невозможен. Это видно, хотя из того, что для таких сред невозможно ввести понятие о фононах, как о колебаниях их атомов около своих положений равновесия. В газообразной среде атом, поглотивший фотон и перешедший в возбужденное состояние, не успевает перераспределить, полученную им при поглощении фотона дополнительную кинетическую энергию между соседними атомами. Поэтому, переходя в исходное невозбужденное состояние после переизлучения фотона, он переходит в динамическое состояние с почти тем же значением кинетической энергии, которая была у него до столкновения с фотоном. При этом, естественно, его импульсные состояния до столкновения и после него различны. В результате, неупругие столкновения фотонов с атомами, происходящие по описанному сценарию, приводят только лишь к рассеянию электромагнитного излучения в среде (см., например, [51]).

1.3. Общее уравнение теплопереноса в твердотельной среде

В этом разделе будет получено общее уравнение теплопереноса в твердотельной, абсолютно упругой, гомогенной, полупрозрачной среде с учетом деформаций твердого тела при изменении его теплового состояния, но при отсутствии действия на нее внешних воздействий (механических, электрических и магнитных). Кроме того, мы исключаем здесь из рассмотрения наличие у среды собственной магнитной или электрической упорядоченности. В частности, она не обладает ни собственным магнитным моментом (ферромагнитная среда), ни собственным электрическим моментом (сегнетоэлектрическая среда). Уравнение теплопереноса, представленное во введении (см. (0.1)), является частным случаем эволюционного уравнения, представленного в этом разделе, в том случае, когда влиянием механических деформаций на теплоперенос можно пренебречь. Здесь мы дадим краткое его обоснование, ввиду того, что в учебной литературе, в курсах по физике твердого тела, тематике, связанной с этим уравнением, не уделяется должного внимания. Уравнение теплопереноса, которому посвящен этот раздел, мы получаем на основе тех же рассуждений, что и в известном курсе [52] по теории упругости. Однако, в отличие от приводимого в нем уравнения, мы, рассматривая в настоящей работе физические ситуации с большими перепадами температур и не используем в наших построениях предположение о малости отклонения $T(\mathbf{x}, t)$ от среднего значения температуры среды.

Эволюционное уравнение для распределения температуры в твердотельной среде получается применением к каждой ее малой пространственной области первого начала термодинамики, смысл которого заключается в сохранении энергии в тепловых процессах. Возьмем произвольную малую пространственную область $\Lambda(\mathbf{x})$ в среде с малым объемом V, сосредоточенную около пространственной точки с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в момент времени t, и запишем для этой области первое начало термодинамики в виде

$$d\mathrm{E}(\mathbf{x}, t) = \delta\mathrm{Q}(\mathbf{x}, t) + \delta\mathrm{A}(\mathbf{x}, t)\,, \qquad (1.3.1)$$

где $d\mathrm{E}(\mathbf{x}, t)$ – малое изменение (дифференциал) внутренней энергии области $\Lambda(\mathbf{x})$ и, соответственно, $\delta\mathrm{Q}(\mathbf{x}, t)$ и $\delta\mathrm{A}(\mathbf{x}, t)$ – соответственно, малое изменение тепла внутри этой области и малая величина работы, проделанная веществом среды, сосредоточенным в ней. Эти малые изменения представляют собой линейные дифференциальные формы относительно изменений значений интенсивных термодинамических параметров, полностью , характеризующих состояние среды в $\Lambda(\mathbf{x})$ при сделанных нами предположениях о ее гомогенности и отсутствии в ней какого-либо электромагнитного упорядочения.

Для выражения дифференциального изменения теплоты $\delta\mathrm{Q}(\mathbf{x}, t)$ применим второе начало термодинамики к веществу, содержащемуся в области $\Lambda(\mathbf{x})$ (см., например, [52]). Естественно, что это возможно только при реализации таких физических условий, при которых процессы теплопереноса в среде являются очень медленными. Тогда $\delta\mathrm{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{V}T(\mathbf{x}, t)d\mathrm{S}(\mathbf{x}, t)$, где $d\mathrm{S}(\mathbf{x}, t)$ – дифференциал плотности энтропии вещества, сосредоточенного в $\Lambda(\mathbf{x})$.

Так как дифференциальная форма $\delta \mathrm{Q} = \mathrm{V}Td\mathrm{S}$ не является точной, если T не является постоянной величиной, как это имеет место в нашем случае, то дифференциальная форма $\delta \mathrm{A} \neq 0$. Выражение для дифференциального изменения работы $\delta \mathrm{A}(\mathbf{x}, t)$ запишем в виде

$$\delta \mathrm{A}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{V}\Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) du_{ij}(\mathbf{x}, t)\,, \tag{1.3.2}$$

который учитывает изменение формы и объема области $\Lambda(\mathbf{x})$ при изменении ее температуры. При этом мы выбираем знак «плюс», в отличие выражения, использованного в [52], в силу принятого нами знака перед $\delta \mathrm{A}$ в формуле (1). Здесь $\Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ – тензор механических напряжений в среде и $u_{ij}(\mathbf{x}, t)$ – тензор деформаций среды в пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$.

Ввиду предположения об абсолютной упругости, отсутствуют необратимые деформации области $\Lambda(\mathbf{x})$ при малом изменении dt времени (отсутствует эффект пластичности), полагая дополнительно, что эти деформации очень малы, можно ограничиться только лишь линейной связью между деформациями и механическими напряжениями. Запишем эту связь в виде [5)]

$$\Sigma_{ij} = \beta_{ij}(T) + C_{ijkl}(T) u_{kl}\,. \tag{1.3.3}$$

Первое слагаемое, независящее от деформаций, описывает напряжения, которые возникают вследствие теплового расширения. Второе слагаемое представляет собой запись закона Гука в наиболее общей форме. При этом тензор четвертого ранга $C_{ijkl}(T)$ модулей упругости, обладающий специальными свойствами симметрии по совокупности своих индексов (см. [52]), зависит от локальной температуры $T = T(\mathbf{x}, t)$ в области $\Lambda(\mathbf{x})$. В частном случае, в предположении об изотропии среды и, следовательно, от напряжений в ней $\Sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = -P(\mathbf{x}, t)\delta_{ij}$, $\delta \mathrm{A}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{V}P(\mathbf{x}, t) du_{ii}(\mathbf{x}, t)$. Здесь $P(\mathbf{x}, t)$ – давление внутри области $\Lambda(\mathbf{x})$ в момент времени t, причем знак в этой формуле выбран таким образом, что $P > 0$, если давление направлено внутрь области.

Покажем, что коэффициент $\beta_{ij}(T)$ определяется формулой

$$\beta_{ij}(T) = -\int_{T_0}^{T} \alpha_{ij}(\tau) d\tau\,, \tag{1.3.4}$$

[5)] Так как в задачах, рассматриваемых в диссертации, существенны большие градиенты температуры, то мы записали первое слагаемое в выражении для тензора напряжений, не ограничиваясь только линейными приращениями температуры, в отличие от формулы, данной в [52].

где симметричный тензор второго ранга $\alpha_{ij}(T)$, с точностью до постоянного множителя, представляет собой тензор коэффициентов теплового расширения. [6] Здесь температура T_0 представляет собой среднюю температуру среды, которая реализуется при наличии в ней полного теплового равновесия.

Воспользуемся стандартными термодинамическими соотношениями (см., например, [53]).

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} + T\mathrm{SV}\,, \qquad S = -\mathrm{V}^{-1}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial T}\,, \tag{1.3.5}$$

где F – свободная энергия области $\Lambda(\mathbf{x})$ среды и учтено, что S – плотность энтропии. Тогда, на основании первого начала термодинамики (1), имеем

$$\delta\mathrm{A} = d\mathrm{F} + \mathrm{VS}dT = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial T}\right)_{u_{ij}} dT + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_{ij}}\right)_T du_{ij} + \mathrm{VS}dT\,,$$

то есть

$$\delta\mathrm{A} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_{ij}}\right)_T du_{ij}\,. \tag{1.3.6}$$

Запишем теперь выражение для свободной энергии с точностью до квадратичных членов разложения по компонентам тензора деформаций

$$\mathrm{F}(T, u_{kl}) = \mathrm{F}_0(T) - \mathrm{V}u_{ij}\int\limits_{T_0}^{T}\alpha_{ij}(\tau)d\tau + \frac{\mathrm{V}}{2}C_{ijkl}(T)u_{ij}u_{kl} \tag{1.3.7}$$

и, следовательно, имеем

$$\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_{ij}}\right)_T = -\mathrm{V}\int\limits_{T_0}^{T}\alpha_{ij}(\tau)d\tau + \mathrm{V}C_{ijkl}(T)u_{kl}\,. \tag{1.3.8}$$

Кроме того, на основании второго соотношения в (5), из (7) следует

$$\mathrm{S}(T, u_{kl}) = \mathrm{S}_0(T) + \alpha_{ij}(T)u_{ij} - \frac{1}{2}\,u_{ij}u_{kl}\frac{\partial}{\partial T}C_{ijkl}(T)\,, \tag{1.3.9}$$

где $\mathrm{S}_0 = -\mathrm{V}^{-1}\partial\mathrm{F}_0/\partial T$, и поэтому коэффициент $\alpha_{ij}(T)$ представляет собой тензор коэффициентов линейного расширения. Отсюда видно, что, в рамках линейной теории упругости, он не зависит от компонент тензора деформаций.

[6] Его главные значения представляют коэффициенты линейного расширения для анизотропной среды. В изотропном случае $\alpha_{ij}(T) = \alpha\delta_{ij}$.

Таким образом, из (6) и (8) следует, что дифференциальное изменение работы $\delta\mathrm{A}(\mathbf{x},t)$, при сделанных предположениях , в общем случае записывается в виде

$$\delta\mathrm{A}(\mathbf{x},t) = \mathrm{V}\Big(-\int_{T_0}^{T}\alpha_{ij}(\tau)d\tau + C_{ijkl}(T)u_{kl}(\mathbf{x},t)\Big)du_{ij}(\mathbf{x},t)\,. \qquad (1.3.10)$$

Сравнивая эту формулу с (2), получаем формулу (4).

Наконец, рассмотрим изменение внутренней энергии в области $\Lambda(\mathbf{x})$ при малом изменении времени dt. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{\partial\mathrm{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \oint_{\partial\Lambda(\mathbf{x})}(\boldsymbol{S}(\mathbf{y},t), d\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y},t)) = 0\,,$$

получаем

$$\frac{\partial\mathrm{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\int_{\Lambda(\mathbf{x})}(\nabla, \boldsymbol{S}(\mathbf{y},t))d\mathbf{y} = -\mathrm{V}(\nabla, \boldsymbol{S}(\mathbf{x},t))\,. \qquad (1.3.11)$$

где интегрирование в первом интеграле производится по замкнутой поверхности – границе области $\Lambda(\mathbf{x})$ с выбором ориентации элемента поверхности $d\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y},t)$ в направлении из $\Lambda(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)$ – вектор плотности потока внутренней энергии в пространственно-временной точке $\langle\mathbf{x},t\rangle$ и переход от поверхностного интеграла к объемному произведен согласно теореме Гаусса.

Подставим в (1) выражения для $\delta\mathrm{Q}(\mathbf{x},t)$ и $\delta\mathrm{A}(\mathbf{x},t)$ – теплоты, выделяемой в области $\Lambda(\mathbf{x})$ и малой работы, произведенной веществом, которое содержится в этой области, при малых ее деформациях, которые вызваны изменением в ней распределения температуры. Поделив на объем V области, запишем первое начало термодинамики в следующей форме: [7]

$$T\,\frac{\partial\mathrm{S}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -(\nabla, \boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)) + $$
$$+\Big(\int_{T_0}^{T}\alpha_{ij}(\tau)d\tau - C_{ijkl}(T)u_{kl}(\mathbf{x},t)\Big)\frac{\partial u_{ij}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\,. \qquad (1.3.12)$$

В предлагаемом подходе к описанию эволюции распределения температуры в среде (при условии отсутствия ее ползучести и пластических деформаций) мы столкнулись с необходимостью описания ее локального в окрестности точки $\mathbf{x}$ термодинамического состояния не только на основе

[7] Ввиду предположения об абсолютной упругости, т.е. отсутствия *эффекта ползучести среды*, то есть сноса области $\Lambda(\mathbf{x})$, при малом изменении dt времени, мы здесь перешли к частным производным по времени от полных (субстанциальных) производных по времени.

значения температуры в этой точке, но и, в дополнение к нему, это состояние характеризуется значением тензора деформаций $u_{ij}(\mathbf{x}, t)$ в этой точке. Тогда дифференциал плотности энтропии в каждой пространственно-временной точке дается следующей формулой

$$d\mathrm{S} = \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial T}\right)_{u_{ij}} dT + \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial u_{ij}}\right)_T du_{ij}\,. \tag{1.3.13}$$

Здесь частные производные, по определению (см. [52]), представляют собой

$$\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial u_{ij}}\right)_T = \alpha_{ij}(T)\,, \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial T}\right)_{u_{ij}} = \frac{1}{T}\,\mathrm{c_v}(T, u_{kl})\,, \tag{1.3.14}$$

где $\mathrm{c_v}(T, u_{kl})$ – теплоемкость среды при постоянном объеме, которая в общем случае является функцией температуры и деформаций среды. Зависимость теплоемкости от компонент тензора деформаций возникает вследствие зависимости тензора α_{ij} от температуры, в силу их определения (14), так как они определяют перекрестные вторые производные от энтропии по независимым интенсивным термодинамическим параметрам среды

$$\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial T \partial u_{ij}} = \frac{\partial}{\partial T}\alpha_{ij}(T) = \frac{1}{T}\,\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\,\mathrm{c_v}(T, u_{kl})\,.$$

Наличие же зависимости тензора $\alpha_{ij}(T)$ от температуры T, при изменении ее в широком диапазоне, является экспериментальным фактом.

Формулы (13), (14) позволяют написать выражение для временной производной от энтропии,

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} = \frac{1}{T}\,\mathrm{c_v}(T, u_{kl})\,\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_{ij}(T)\,\frac{\partial u_{ij}}{\partial t}\,. \tag{1.3.15}$$

Из (12) и (15), производя очевидное преобразование

$$\int_{T_0}^{T} \alpha_{ij}(\tau) d\tau - T\alpha_{ij}(T) = -T_0\alpha_{ij}(T_0) - \int_{T_0}^{T} \tau\Big(\frac{d}{d\tau}\alpha_{ij}(\tau)\Big) d\tau\,,$$

получаем, окончательно, искомое уравнение теплопереноса с учетом деформаций среды,

$$\mathrm{c_v}(T, u_{kl})\frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla, \boldsymbol{S}(\mathbf{x}, t)) -$$

$$-\Big(T_0\alpha_{ij}(T_0) + \int_{T_0}^{T} \tau\Big(\frac{d}{d\tau}\alpha_{ij}(\tau)\Big) d\tau + C_{ijkl}(T) u_{kl}(\mathbf{x}, t)\Big)\frac{\partial u_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\,. \tag{1.3.16}$$

Это эволюционное уравнение относительно распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ не является уравнением дивергентного типа. Это связано с тем, что тепловая энергия в среде не сохраняется.

Заметим, что в предлагаемом подходе к описанию эволюции распределения температуры в среде мы столкнулись с необходимостью описания ее локального в окрестности точки $\mathbf{x}$ термодинамического состояния не только на основе значения температуры в этой точке, но это состояние характеризуется также значением тензора деформаций $u_{ij}(\mathbf{x},t)$ в этой точке. Таким образом, к уравнению теплопереноса в форме (12) должно быть добавлено уравнение, описывающее изменение поля смещений среды в окрестности каждой из пространственных точек. В рамках линейной теории упругости таким уравнением является уравнение Ляме (см. [52]) с учетом затухания,

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + 2\kappa \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \Sigma_{ik}}{\partial x_k}\,, \tag{1.3.17}$$

где ρ_m – средняя массовая плотность среды, κ – декремент затухания звуковых волн.

Кроме добавления к уравнению теплопереноса эволюционного уравнения, описывающее эволюцию упругих деформаций, для завершения построения эволюционной математической модели, которая позволяет прогнозировать совместную временную зависимость распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ и распределения деформаций $u_{ij}(\mathbf{x},t)$ в твердотельной среде, нужно найти явный вид для векторного поля $\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)$, как функционала от этих распределений, значения которого полностью определялись их значениями при временах t', меньших t. При наличии выражения для этого функционала, уравнение (12), с учетом формулы (15), представляет собой общее уравнение теплопереноса в твердотельной абсолютно упругой среде.

Как уже было сказано выше, далее, в этой работе мы не будем учитывать эффект расширения среды за счет изменения ее локальной температуры, ввиду его малости. В этом случае нужно положить в уравнении теплопереноса $u_{ij}(\mathbf{x},t) = 0$, $du_{ij}(\mathbf{x},t) = 0$, то есть $\delta \mathrm{A}(\mathbf{x},t) = 0$. При этом теплоемкость $\mathrm{c_v}$ не зависит от деформаций. Тогда это уравнение принимает вид

$$\mathrm{c_v}(T)\frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla, \boldsymbol{S}(\mathbf{x},t))\,. \tag{1.3.18}$$

Рассмотрим плотность потока $\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)$ энергии в правой части этого уравнения. Стандартный подход в теории теплопереноса, основанный на предположении о малости градиентов распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$, состоит в разложении плотности потока $\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)$, зависящего локальным образом от $T(\mathbf{x},t)$, по степеням этих градиентов и учета, в первом приближении, только слагаемого первой степени,

$$\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t) = -\Big(\varkappa_{ij}(T)\nabla_j T\Big)(\mathbf{x},t)\,. \tag{1.3.19}$$

При этом если не производить учета вклада в плотность потока $\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)$ радиационного теплообмена, то $\varkappa_{ij}(T)$ представляет собой, по определению, тензор коэффициентов теплопроводности, а уравнение (18), при таком виде плотности потока $\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)$, представляет собой *уравнение теплопроводности*, которое, при наличии зависимости $\varkappa_{ij}(T)$ от T, является нелинейным. Знак минус здесь указывает на то, что при выборе правления векторного поля $\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)$ в сторону спадания градиента, компоненты тензора $\varkappa_{ij}(T)$ теплопроводности представляют коэффициенты положительно определенной квадратичной формы.

Так как для нас, в дальнейшем представляет наибольший интерес такие физические ситуации, при которых имеются значительные перепады температуры, то есть величина ее градиентов, при которых проявляется влияние радиационного теплообмена на теплоперенос, то, в общем случае, плотность потока $\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t)$ мы представим в следующей форме:

$$\boldsymbol{S}(\mathbf{x},t) = -\Big(\varkappa_{ij}(T)\nabla_j T\Big)(\mathbf{x},t) + \boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]\,, \tag{1.3.20}$$

где второе слагаемое описывает радиационный теплообмен и которое, в общем случае, должно содержать все степени градиентов поля $\boldsymbol{S}$, то есть функционал $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ от распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ должен представляться некоторым интегральным преобразованием от этого распределения. В результате, мы приходим к эволюционному уравнению для распределения температуры в той форме (0.1), которая представлена во введении,

$$\mathrm{c_v}(T)\dot{T}(\mathbf{x},t) = \nabla_i\varkappa_{ij}(T)\nabla_j T(\mathbf{x},t) - (\nabla, \boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T])\,, \tag{1.3.21}$$

где для определения явного вида функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ должна быть сформулирована специальная процедура. Этому вопросу мы посвятим следующий раздел, в котором этот функционал определяется на основе т.н. *теории переноса излучения*.

1.4. Теория переноса излучения в полупрозрачной среде и определение плотности потока теплового электромагнитного поля

В этом разделе мы изложим метод расчета функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$, используя рассуждения теории переноса излучения. Однако, эти рассуждения, по сравнению со стандартной теорией (см. [10]-[14]), будут несколько модифицированы на базе представлений геометрической оптики и основополагающей идеи, высказанной в работах [32], [33], а также результатов, полученных в [Л15], [Л16]. Такая модификация приводит к несколько отличающемуся от имеющегося в литературе выражения для функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ в случае реальных трехмерных распределений температуры $T(\mathbf{x},t)$. Подтверждением правильности подхода использованного в этом разделе при вычислении функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ и проведенных нами построений будет решение этой же задачи, изложенное в Главе 3, которое будет получено в рамках более глубоких теоретических рассмотрений на основе неравновесной термодинамики флуктуаций. Необходимость указанной модификации стандартной теории переноса излучения при построении теории радиационного теплообмена связана с тем, что в указанных выше классических монографиях, посвященных радиационному теплообмену, принят следующий подход. В них сначала подробно разбирается случай одномерного переноса излучения при имеющемся одномерном неоднородном распределении температуры в среде. А затем рассуждения, примененные при построении кинетического уравнения переноса излучения в одномерном случае, автоматически переносятся на многомерный случай. Однако, на наш взгляд, многомерный случай существенно отличается от одномерного возможностью рассеяния излучения.

Пусть $\bar{L}$ – характерный размер полупрозрачной среды, в которой изучается радиационный теплоперенос. Например, в случае, если в среде имеется неоднородное распределение температуры $T(\mathbf{x})$ и T_0 – средняя температура среды, то в качестве $\bar{L}$ можно выбрать расстояние, на котором отношение $(T(\mathbf{x}')-T_0)/(T(\mathbf{x})-T_0)$ уклонения значения температуры $T(\mathbf{x}')$ от средней температуры T_0 в точке наблюдения $\mathbf{x}'$ к такому же уклонению значения температуры $T(\mathbf{x})$ в некоторой фиксированной точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$ изменяется e раз. Тогда величину затухания теплового электромагнитного поля в среде можно охарактеризовать *оптической толщиной*, которая равна произведению размера L на коэффициент поглощения света в среде. Для оптической толщины в литературе употребляется эквивалентный термин – *оптическая длина затухания.* В случае сильного затухания излучения в среде, то есть малой оптической длины затухания, расстояния, на которых существенен механизм радиационного теплообмена, очень малы, и поэтому очень малы градиенты распределения температуры при вычислении функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ для таких распределений. В этом случае функционал $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ допускает разложение по величине градиента $\nabla_j T$. Тогда допустимо использование, в первом приближении, только первого члена разложения этого функционала $-\kappa_{ij}(T)\nabla_j T$, где компоненты тензора $\kappa_{ij}(T)$ образуют положительную симметричную матрицу, а знак «минус» выбран из тех соображений, что слагаемое $-(\nabla, \boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T])$ в уравнении (3.21) должно приводить к тем же изменениям распределения температуры при фиксированном направлении ее градиента, что и слагаемое $-\nabla_i \varkappa_{ij}(T)\nabla_j$. Таким образом, в случае сильного поглощения излучения в среде эволюционное уравнение (3.21) превращается в следующее:

$$\mathrm{c_v}(T)\dot{T}(\mathbf{x}, t) = \nabla_i\big(\varkappa_{ij}(T) + \kappa_{ij}(T)\big)\nabla_j T(\mathbf{x}, t) \tag{1.4.1}$$

и вклады эволюцию распределения температуры к равновесному распределению от обоих механизмов теплопереноса (теплопроводности и радиационного теплообмена) экспериментально неразделимы.

Рассмотрим полупрозрачную среду, которая занимает некоторую геометрическую область Λ, которая, для простоты, имеет гладкую границу. Пусть в области Λ имеется распределенный источник излучения, имеющий удельную мгновенную в момент времени t интенсивность $I_0[\mathbf{x}', \mathbf{m}', t; T]$ по направлению с единичным вектором $\mathbf{m}'$, которая зависит от пространственной точки $\mathbf{x}' \in \Lambda$. Эта интенсивность является функционалом от мгновенного распределения температуры $T(\mathbf{x}, t)$.

Исходя из определения, интеграл от удельной интенсивности по всем направлениям $\mathbf{m}$ составляет полной мгновенной интенсивности излучения

$$\int\limits_{\mathbf{m}^2=1} I_0[\mathbf{x}', \mathbf{m}', t'; T]d\Omega(\mathbf{m}') = I_0[\mathbf{x}', t; T]$$

из пространственной точки $\mathbf{x}'$. Здесь интегрирование осуществляется по единичной сфере. Значение функции $I_0[\mathbf{x}', \mathbf{m}', t; T]d\mathbf{x}'$, физически, представляет энергию электромагнитного излучения, излучаемую из малого объема $d\mathbf{x}'$, с центром в точке $\mathbf{x}'$, в единицу времени в момент времени t, в каждом фиксированном направлении, характеризуемом единичным вектором $\mathbf{m}'$. Зависимость значения $I_0[\mathbf{x}', \mathbf{m}', t; T]$ от точки $\mathbf{x}'$ связана с ее функциональной зависимостью от неоднородного распределения температуры

$T(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Lambda$. При неоднородном распределении температуры оптические характеристики среды, ввиду их зависимости от температуры, также зависят от точки пространства. В дальнейшем будем считать, что в каждой точке излучение является сферически симметричным, то есть положим, что $I_0[\mathbf{x}', \mathbf{m}', t; T] = I_0[\mathbf{x}', t; T]/4\pi$. Это соответствует так называемому радиационному теплопереносу с диффузным (изотропным) излучением [10]. В качестве примера укажем, что в простейшем случае закона излучения абсолютно черного тела функция $I_0[\mathbf{x}', t; T]$ полностью определяется значением распределения температуры в точке $\mathbf{x}'$ в момент времени t, а именно, $I_0[\mathbf{x}', t; T] \sim T^4(\mathbf{x}', t)$.

Рассмотрим любой световой луч, выходящий из точки $\mathbf{x}'$. Ввиду зависимости от температуры оптических характеристик среды, этот луч, по мере своего движения в Λ, вообще говоря, изменяет скорость. Однако, ввиду малости изменений показателя преломления, эти изменения скорости очень малы. Тогда, пренебрегая изменениями скорости продвижения светового луча, будем считать, что он двигается в Λ с постоянной скоростью $\bar{c}$, которая вычисляется по формуле $\bar{c} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где ε и μ – соответственно усредненные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Таким образом, каждый излученный луч, двигается равномерно со скоростью $\bar{c}$ внутри Λ и, достигая границы области, испытывает отражение с вероятностью (коэффициентом отражения) ϑ. После этого он продолжает движение в некотором другом направлении, которое определяется законом геометрической оптики для отражения луча от гладкой поверхности. Ввиду большой величины скорости света $\bar{c}$, будем считать, что движение луча (той его части, которая остается внутри Λ при каждом из отражений) с последовательными отражениями от границ области продолжается неограниченно.

Пусть теперь $\mathbf{x}$ – радиус-вектор другой произвольной точки из Λ. Рассмотрим луч, который выходит из точки $\mathbf{x}'$ в направлении $\mathbf{m}'$ и приходит в точку $\mathbf{x}$, проходя ее в направлении $\mathbf{m}$. Существенно, что в общем положении пар точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, а также пар единичных векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$ имеется: либо один такой луч, либо такой луч отсутствует.

В самом деле, непрерывная кусочно-линейная траектория движения луча в области Λ описывается динамической системой $\langle \mathbf{X}(s), \mathbf{m}(s) \rangle$ с фазовым пространством $\Lambda \times \mathbb{S}_2$, где $\mathbb{S}_2$ – единичная сфера, которая является множеством возможных единичных векторов, в котором принимает значения функция $\mathbf{m}(s)$, s – длина пройденного пути. Эта динамическая система однозначно определяется решением системы дифференциальных уравнений (точка обозначает дифференцирование по s)

$$\dot{\mathbf{X}}(s) =, \mathbf{M}(s)\,, \qquad \dot{\mathbf{M}}(s) = 0\,, \tag{1.4.2}$$

если точки $\mathbf{X}(s)$ находятся внутри области Λ, начальными условиями для векторов $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}'$, $\mathbf{M}(0) = \mathbf{m}'$ и дополнительными условиями в расположенных на границе области точках излома траектории. Эти условия определяется следующим правилом геометрической оптики. Направляющий единичный вектор $\mathbf{n}_+$, определяющий направление движения луча непосредственно после попадания на границу области, лежит в одной плоскости с единичным вектором $\mathbf{n}_-$, определяющим направление движения луча непосредственно до попадания на границу Λ в той же самой точке границы, и единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ к поверхности в этой точке; при этом векторы $\mathbf{n}_-$ и $\mathbf{n}_+$ лежат в этой плоскости по разные стороны от вектора $\mathbf{n}$, а угол падения, определяемый скалярным произведением $(\mathbf{n}_-, \mathbf{n})$, и угол отражения, определяемый скалярным произведением $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_+)$ совпадают. Отсюда следует, что траектория указанной динамической системы либо проходит через точку $\mathbf{x}$ в направлении $\mathbf{m}$, либо такое положение не имеет места. Если она проходит через эту точку в одном и том же направлении многократно, то она является периодической. Периодические траектории, проходящие через фиксированную точку $\mathbf{x} \in \Lambda$, могут быть реализованы для начальных данных $\langle \mathbf{x}', \mathbf{m}' \rangle$, составляющих множество не общего положения в $\Lambda \times \mathbb{S}_2$ [54]. Таким образом определенная динамическая система однозначно определяет решение $\langle \mathbf{X}(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}'), \mathbf{M}(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}') \rangle$ для каждой пары начальных данных $\langle \mathbf{x}', \mathbf{m}' \rangle$.

Из существования единственного решения с указанными выше свойствами следует, что система уравнений

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(s)\,, \qquad \mathbf{m} = \mathbf{M}(s)\,, \tag{1.4.3}$$

при фиксированных векторах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{m}$, имеет, в общем положении, либо одно решение $\mathbf{m}' = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m})$, $|\mathbf{m}'| = 1$, либо вообще не имеет решений. Функции $\langle \mathbf{X}(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}'), \mathbf{M}(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}') \rangle$ обладают свойствами

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}(s|\mathbf{x}, -\mathbf{m})\,, \qquad \mathbf{m}' = -\mathbf{M}(s|\mathbf{x}, -\mathbf{m})\,.$$

Каждое решение $\langle \mathbf{X}(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}'), \mathbf{M}(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}') \rangle$, если оно существует, определяет траекторию $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m})$ с начальной точкой $\mathbf{x}'$, конечной точкой $\mathbf{x}$ и направлением входа в точку $\mathbf{x}$, определяемым единичным вектором $\mathbf{m}$.

Каждой траектории $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{m})$ соответствует три характеристики: ее длина $l[\Gamma]$ (расстояние между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ вдоль траектории), число точек $n[\Gamma]$ отражения луча от границы в процессе прохождения луча от точки $\mathbf{x}'$ до точки $\mathbf{x}$ и единичный вектор $\mathbf{M}[\Gamma] \equiv \mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{m})$, указывающий на направление выхода этой траектории из точки $\mathbf{x}'$.

Одним из основных положений, заложенных в нашу конструкцию плотности потока $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ является предположение о том, что луч двигаясь с течением «времени» s, равному текущей длине траектории вплоть до этого момента, изменяет свою интенсивность по направлению движения по некоторому закону $I(s|\mathbf{x}',\mathbf{m}')$. При изотропном излучении имеет место $I(0|\mathbf{x}',\mathbf{m}') = I_0[\mathbf{x}',t;T]$. Тогда к моменту прохождения лучом точки фазового пространства $\langle \mathbf{x},\mathbf{m}\rangle$ он имеет направленную интенсивность $I(l[\Gamma]|\mathbf{x}',\mathbf{M}[\Gamma])$.

Имеется не более чем счетное множество возможных значений единичных векторов $\mathbf{m}$, для которых пространственные точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ могут быть связаны световым лучом. Следовательно, полный поток энергии, проходящий в каждый фиксированный момент времени через малый объем V с центром в точке $\mathbf{x}$ по направлению $\mathbf{m}$, который приходит от всех точек фазового пространства, равен

$$\mathrm{V}\int\limits_{\Lambda}\sum_{\Gamma}\mathbf{m}I(l[\Gamma]|\mathbf{x}',\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{m}))\,d\mathbf{x}'\,, \tag{1.4.4}$$

где сумма производится по всем лучам Γ, которые связывают пространственные точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ световым лучом.

Навстречу этому потоку из точки $\mathbf{x}$ в направлении $-\mathbf{m}$ выходит луч с интенсивностью $I_0[\mathbf{x},t;T]$. Тогда баланс энергии в объеме V равен следующему интегралу по всем направлениям $\mathbf{m}$:

$$\mathrm{V}\int\limits_{\Lambda}\sum_{\Gamma}\mathbf{m}\Big(I(l[\Gamma]|\mathbf{x}',\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{m})) - I_0[\mathbf{x},t;T]\Big)d\mathbf{x}'\,. \tag{1.4.5}$$

Ввиду того, что

$$\int\sum_{\Gamma}\mathbf{m}d\mathbf{x}' = |\Lambda|\int\limits_{\mathbb{S}_2}\mathbf{m}d\Omega(\mathbf{m}) = 0$$

то, поделив на V получаем основное выражение для функционала

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T] = \int\limits_{\Lambda}\sum_{\Gamma}\mathbf{m}I(l[\Gamma]|\mathbf{x}',\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{m}))d\mathbf{x}'\,, \tag{1.4.6}$$

значения которого представляют собой плотность потока энергии теплового излучения в среде.

Для завершения конструкции, установим явный вид функции $I(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}')$. С этой целью, положим, что эта функция имеет универсальную зависимость от пройденном лучом длины s, независимо от начальной пространственной точки $\mathbf{x}'$ этого луча и его направления $\mathbf{m}'$. Тогда

$$I(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}') = \lambda(s) I_0[\mathbf{x}', t; T]\,, \tag{1.4.7}$$

где функция $\lambda(s)$ подлежит определению.

В отсутствии границ области, занимаемой средой, когда каждый луч $\mathbf{X}(s)$ является отрезком прямой линии и все лучи имеют одну и ту же начальную точку $\mathbf{x}'$, имеется два механизма для затухания энергии переносимой каждым отдельным лучом. Один из них связан с диффузным расхождением всех лучей, излучаемых из заданной точки $\mathbf{x}'$, а второй – с поглощением энергии луча средой при его распространении в среде. В соответствии с этим положим, что оба механизма изменения энергии, переносимой лучом, действуют независимо. Тогда $\lambda(s) = \lambda_1(s)\lambda_2(s)$, где каждая из функций $\lambda_1(s)$ и $\lambda_2(s)$ описывает изменение энергии в зависимости от длины луча s в соответствии с указанными механизмами.

Предположим сначала, что поглощение излучения в среде отсутствует. Рассмотрим изменение интенсивности излучения в каждом из лучей длины s, выходящих из точки $\mathbf{x}'$. Все концевые точки этих лучей расположены на сфере радиуса s. Ввиду сферической симметрии величина интенсивности каждого из лучей не зависит от направления распространения. С другой стороны, из закона сохранения энергии, полная энергия всех лучей, проходящих в каждый фиксированный момент времени через поверхность сферы радиуса s, должна совпадать с полной энергией $I_0[\mathbf{x}', t; T]$, выходящих лучей из точки $\mathbf{x}'$ – центра сферы. При этом мы пренебрегаем малым запаздываем по времени связанным с прохождением луча, считая, что за время $s/\bar{c}$ распределение температуры $T(\mathbf{x}, t)$ практически не изменилось. Откуда получаем

$$I(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}') = \frac{I_0[\mathbf{x}', t; T]}{4\pi s^2}\,, \qquad \lambda_1(s) = \frac{1}{4\pi s^2}\,. \tag{1.4.8}$$

Учтем теперь поглощение излучения безграничной средой, полагая, что отсутствует диффузное разбегание лучей. Для этого применим для каждого луча закон Бугера-Ламберта-Бера, который был получен экспериментально и который утверждает, что поглощение излучения в среде, падающего перпендикулярно на ее границу параллельным пучком лучей, пропорционально $\exp(-\gamma l/\bar{c})$, где l – глубина проникновения лучей в среду и $\bar{c}/\gamma$ – «оптическая толщина» среды. Это означает, что $I(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}') = I_0[\mathbf{x}', t; T] \exp(-\gamma s/\bar{c})$, где мы также пренебрегли запаздываем по времени в изменении распределения температуры. Отсюда следует, что $\lambda_2(s) = \exp(-\gamma s/\bar{c})$.

Суммируя наши рассуждения, подставим выражения для функций $\lambda_j(s)$, $j = 1, 2$ в (7),

$$I(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}') = \frac{I_0[\mathbf{x}', t; T]}{4\pi s^2} \exp(-\gamma s/\bar{c})\,. \quad ^{8)} \tag{1.4.9}$$

Подстановка найденного выражения для функции $I(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}')$ в (6) в случае безграничной среды, когда $\Lambda = \mathbb{R}^3$, приводит к следующему выражению:

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\Gamma} \mathbf{m} \frac{\exp(-\gamma l[\Gamma]/\bar{c})}{l^2[\Gamma]} I_0[\mathbf{x}', t; T] d\mathbf{x}'\,.$$

Так как в рассматриваемом случае множество возможных векторов $\mathbf{m}$ состоит из одного вектора $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ и $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$, то

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \exp\big(- \gamma |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/\bar{c}\big) I_0[\mathbf{x}', t; T] d\mathbf{x}'\,, \tag{1.4.10}$$

где учтено, что в рассматриваемом случае $l[\Gamma] = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

Наконец, рассмотрим случай, когда среда занимает область Λ, обладающую границей $\partial\Lambda$ и учтем ее влияние. При каждом отражении луча от границы интенсивность изменяется в ϑ раз, где $\vartheta < 1$ – коэффициент отражения. Тогда, для учета влияния границ, выражение (9) должно быть заменено на следующее:

$$I(s|\mathbf{x}', \mathbf{m}') = \vartheta^{n(s)} \frac{I_0(\mathbf{x}', t)}{4\pi s^2} \exp(-\gamma s/\bar{c})\,, \tag{1.4.11}$$

где $n(s)$ – число отражений рассматриваемого луча от границы.

Полученное выражение для интенсивности излучения, сосредоточенной в одном луче, после подстановки в (5), приводит к следующему выражению для плотности потока энергии в каждой фиксированной точке $\mathbf{x} \in \Lambda$

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Lambda} I_0(\mathbf{x}', t) \sum_{\Gamma} \vartheta^{n([\Gamma])} \frac{\mathbf{m}}{l^2[\Gamma]} \exp\big(- \gamma l[\Gamma]/\bar{c}\big) d\mathbf{x}'\,. \tag{1.4.12}$$

8) Множитель s^{-2}, являющийся следствием использования трехмерной геометрии для описания распространения излучения, отсутствует в формулах стандартной теории переноса излучения.

1.5. Приближенные методы вычисления функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$

Выражение (4.8) $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ является очень сложным с аналитической точки зрения. Его вычисление состоит из решения двух задач. Во-первых, нужно определить класс всех лучей $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m})$, как функцию от пары пространственных точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ и определить функцию $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m})$ – решение системы уравнений (4.3) при $\mathbf{m}$, принадлежащему каждому из этих классов. Во-вторых, нужно вычислить аналитически интеграл в формуле (4.10). Ясно, что решение этих задач, как правило, не удастся решить точно аналитически. По этой причине, для получения конкретных аналитических выражений, необходимы различного рода приближения, позволяющие решить эти задачи.

1.5.1. Случай бесконечной среды. Рассмотрим случай безграничной среды и будем считать, что отклонение распределения температуры $T(\mathbf{x}, t)$ от равновесного значения имеется только лишь в ограниченной области. В этом случае для каждой пары точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, ввиду отсутствия границы и, как следствие, точек излома лучей $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m})$, существует только один луч Γ с направляющим вектором $\mathbf{m} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ входа в точку $\mathbf{x}$, и, по этой же причине, $\mathbf{m}' = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m}) = \mathbf{m}$, а длина этого луча равна $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = l[\Gamma]$. Тогда выражение в правой части (4.10) принимает вид

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \exp(-\gamma|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/\bar{c}) I_0[\mathbf{x}', t; T] d\mathbf{x}'\,. \tag{1.5.1}$$

В частности, это выражение применимо, если $I_0[\mathbf{x}, t; T]$ определяется законом излучения абсолютно черного тела, $I_0[\mathbf{x}, t; T] = \varsigma T^4(\mathbf{x}, t)$, где ς – постоянная Стефана-Больцмана.

1.5.2. Случай сильного поглощения. В этом случае постоянная γ очень велика. Поэтому для получения соответствующей формулы мы воспользуемся асимптотическим разложением интеграла в (4.10) при $\gamma \to \infty$, применив метод Лапласа [55], [75]. Эта асимптотика имеет универсальный вид и не связана с конкретной геометрией образца. Из формулы (4.10) следует, что для каждой фиксированной точки $\mathbf{x} \in \Lambda$, основной вклад в интеграл дают только точки $\mathbf{x}'$ в достаточно малой шаровидной окрестности радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}$, ввиду экспоненциальной малости вклада от точек $\mathbf{x}'$ за пределами этой окрестности. Тогда для таких точек $\mathbf{x}'$ реализуется случай рассмотренной в предыдущем пункте, то есть имеется только один луч, который дает вклад в интеграл. По этой причине, можно сразу воспользоваться формулой (1). Тогда, с целью применения метода Лапласа, в интеграле формулы (1) совершим замену переменной интегрирования $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{y}$. В результате, получим

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T] = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Lambda - \mathbf{x}} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} \exp(-\gamma |\mathbf{y}|/\bar{c}) I_0[\mathbf{x} - \mathbf{y}, t; T] d\mathbf{y} \,.$$

Заменим, далее, переменную интегрирования по правилу $\gamma \mathbf{y}/\bar{c} \Rightarrow \mathbf{y}$,

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T] = \frac{\bar{c}}{4\pi\gamma} \int\limits_{\gamma(\Lambda - \mathbf{x})/\bar{c}} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} \exp(-|\mathbf{y}|) I_0[\mathbf{x} - \bar{c}\mathbf{y}/\gamma, t; T] d\mathbf{y} \,. \qquad (1.5.2)$$

Разложим функцию $I_0[\cdot]$ по степеням $\bar{c}/\gamma \bar{L}$,

$$I_0[\mathbf{x} - \bar{c}\mathbf{y}/\gamma, t; T] = I_0[\mathbf{x}, t; T] - \frac{\bar{c}}{\gamma} y_k \nabla_k I_0[\mathbf{x}, t; T] + \frac{\bar{c}^2}{2\gamma^2} y_{k_1} y_{k_2} \nabla_{k_1} \nabla_{k_2} I_0[\mathbf{x}, t; T] + \ldots \,.$$

После подстановки этого разложения в (2) получаем, при $\gamma \to \infty$, с точностью до экспоненциально малых слагаемых $\exp(-\gamma \bar{L}/\bar{c})$, где $\bar{L}$ – характерный масштаб температурной неоднородности,

$$S_j[\mathbf{x}, t; T] = \frac{\bar{c}}{4\pi\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \exp(-|\mathbf{y}|) \times$$

$$\times \left(I_0[\mathbf{x}, t; T] - \frac{\bar{c}}{\gamma} y_k \nabla_k I_0[\mathbf{x}, t; T] + \frac{\bar{c}^2}{2\gamma^2} y_{k_1} y_{k_2} \nabla_{k_1} \nabla_{k_2} I_0[\mathbf{x}, t; T] + \ldots \right) \frac{y_j}{|\mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} \,. \qquad (1.5.3)$$

В этом разложении, слагаемые с четными степенями γ^{-1} обращаются в ноль,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-|\mathbf{y}|} \frac{y_j}{|\mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} = 0 \,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-|\mathbf{y}|} y_{k_1} y_{k_2} \frac{y_j}{|\mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} = 0 \,,$$

так как эти интегралы представляют собой тензоры нечетного ранга, инвариантные относительно произвольных вращений, а при отражениях пространства изменяют знак. Тогда, в главном приближении, поток $S_j[\mathbf{x}, t; T]$ определяется слагаемым, пропорциональным γ^{-1},

$$S_j[\mathbf{x}, t; T] = -\frac{\bar{c}^2}{4\pi\gamma^2} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \exp(-|\mathbf{y}|) \frac{y_j y_k}{|\mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} \Big) \nabla_k I_0[\mathbf{x}, t; T] \,. \qquad (1.5.4)$$

Интеграл в (4) представляет собой инвариантный относительно вращений и отражений тензор второго ранга. Поэтому, он пропорционален символу Кронекера. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-|\mathbf{y}|}\frac{y_j y_k}{|\mathbf{y}|^3}d\mathbf{y} = A\delta_{jk}\,. \tag{1.5.5}$$

Вычисляя след от обеих частей равенства, получаем

$$3A = \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-|\mathbf{y}|}|\mathbf{y}|^{-1}d\mathbf{y} = 4\pi\int\limits_0^\infty e^{-|\mathbf{y}|}|\mathbf{y}|d|\mathbf{y}| = 4\pi\,.$$

Следовательно, $A = 4\pi/3$. Вместе с (5) это дает нам искомое выражение для потока

$$S_j[\mathbf{x},t;T] = -\frac{\bar{c}^2}{3\gamma^2}\nabla_j I_0[\mathbf{x},t;T]\,. \tag{1.5.6}$$

в принятом приближении.

Таким образом, на основании эволюционного уравнения (3.21), для изменяющегося во времени распределения температуры в образце с учетом радиационного теплообмена, имеем

$$\mathrm{c_v}(T)\dot{T}(\mathbf{x},t) = \nabla_i \varkappa_{ij}(T)\nabla_j T(\mathbf{x},t) + \frac{\bar{c}^2}{3\gamma^2}\Delta I_0[\mathbf{x},t;T]\,. \tag{1.5.7}$$

При этом предполагается, что интенсивность $I_0[\mathbf{x},t;T]$, являясь конкретным функционалом от распределения температуры, также изменяется со временем. В случае, если $I_0[\mathbf{x},t;T] = \varsigma T^4(\mathbf{x},t)$, что соответствует т.н. *серому приближению* [10], имеем

$$\mathrm{c_v}(T)\dot{T}(\mathbf{x},t) = \nabla_i \varkappa_{ij}(T)\nabla_j T(\mathbf{x},t) + \frac{\varsigma\bar{c}^2}{3\gamma^2}\Delta T^4(\mathbf{x},t)\,. \tag{1.5.8}$$

1.5.3. Случай малого коэффициента отражения. В случае малого коэффициента отражения $\vartheta \ll 1$ функционал $S_j[\mathbf{x},t;T]$, $j = 1,2,3$ строится в виде ряда

$$S_j[\mathbf{x},t;T] = \sum_{p=0}^\infty S_j^{(p)}[\mathbf{x},t;T]\,, \tag{1.5.9}$$

где каждая из плотностей потоков $S_j^{(p)}[\mathbf{x},t;T]$, $p = 0,1,2,...$ определяется как вклад в $S_j[\mathbf{x},t;T]$ от тех и только тех лучей, приходящих в точку $\mathbf{x}$, которые, до попадания в нее, испытали ровно p отражений от границы области Λ, и поэтому они пропорциональны ϑ^p. Каждому значению $p \in \mathbb{N}_+$ соответствует какая-то часть Λ_p области Λ так, что для каждой точки $\mathbf{x}' \in \Lambda_p$ из этой подобласти соответствует функция $\mathbf{M}_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m})$, принимающая значения на единичной сфере и такая, что для единичных векторов $\mathbf{m}$, которые принимают значения из множества значений этой функции, существует траектория $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m})$ с начальными данными $\langle \mathbf{x}', \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{m}) \rangle$, имеющая ровно p точек отражения от границы $\partial\Lambda$

$$\boldsymbol{S}^{(p)}[\mathbf{x}, t; T] = \frac{\vartheta^p}{4\pi} \int\limits_{\Lambda_p} I_0[\mathbf{x}', t; T] \sum_{\Gamma} \frac{\mathbf{m}}{l^2[\Gamma]} \exp(-\gamma l[\Gamma]/\bar{c}) d\mathbf{x}' \,. \tag{1.5.10}$$

Преимущество использования разложения (9) и ограничение конечным набором его членов при условии малости коэффициента отражения, состоит в том, что упрощается решение первой задачи из указанных в начале пункта. Как правило, для областей Λ с не очень сложной границей $\partial\Lambda$ удается явным образом описать все лучи с некоторым фиксированным числом точек отражения от границы.

1.6. Выводы

В главе кратко изложена история развития теории радиационного теплопереноса в полупрозрачных средах и, на качественном уровне, дано описание физического механизма этого явления. Описан вывод уравнения теплопереноса в твердотельной среде с учетом радиационного теплообмена и эффекта нелинейного теплового расширения, в рамках линейной теории упругости (см. (3.21)). Дано усовершенствование стандартной теории переноса излучения с целью вычисления плотности потока энергии электромагнитного поля, переносящего тепло в полупрозрачной среде с диффузными источниками излучения (см. (4.10)).

Глава 2. Стохастические модели переноса тепла излучением в твердотельных средах

В связи со сложностью построения микроскопической теории переноса теплового излучения, в этой главе предлагается полуфеноменологический статистический подход, в рамках которого в теорию вводится стохастическое электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла без конкретизации микроскопического описания перехода его энергии в тепловую энергию неупорядоченных колебаний атомов (ионов) твердотельной среды. Такой подход позволяет преодолеть главный недостаток существующей теории радиационного теплообмена – отсутствие в ней переносящего тепло электромагнитного поля. Однако, в теории не используется квантовое описание процессов излучения и поглощения, которое бы вносило излишние усложнения. Такое положение разумно с теоретической точки зрения, так как перенос теплового излучения не является квантовым эффектом.

2.1. Физические характеристики твердотельных полупрозрачных сред при радиационном теплообмене

В этом разделе будут описаны конкретные физические условия с указанием значений соответствующих физических величин, при которых существенен учет радиационного теплообмена при расчетах теплопереноса в твердотельных средах.

Для построения флуктуационной теории радиационного теплопереноса в полупрозрачных диэлектриках и высокоомных полупроводниках необходимы: во-первых, оптические характеристики таких сред – показатель преломления и оптическая толщина, характеризующие реальную и мнимую части их диэлектрической проницаемости, и коэффициент отражения; во-вторых, такая электрическая характеристика, как удельная электропроводность; и, в-третьих, тепловая характеристика – температуропроводность среды.

Что касается оптических характеристик, то для определения области применимости теории в первую очередь важно определить, какие среды мы называем полупрозрачными. Свойство среды, характеризующее ее способность к пропусканию световых лучей характеризуют такими связанными между собой величинами, как *прозрачность среды*, *коэффициент пропускания* и *оптическая толщина*.

Прозрачностью среды называется физическая характеристика, показывающая, какая доля светового потока, падающего на границу слоя такой среды, проходит через него без изменения направления при некоторой его номинальной толщине. При этом влияние поверхностей раздела, через которые проходит излучение, не учитывается. Высокой прозрачностью обладают среды с направленным пропусканием излучения. В диапазоне видимого света сквозь тела из таких сред при подходящих геометрических формах отчетливо видны находящиеся за ними предметы. Прозрачность отличают от свойства пропускания света вообще, так как среда может быть непрозрачная, но в то же время пропускать рассеянный свет. Соответственно, прозрачность характеризуется только коэффициентом направленного (но не диффузного) пропускания. В этом смысле, прозрачность среды не является подходящей оптической, экспериментально определяемой характеристикой для определения области применимости нашей теории, так как для радиационного теплопереноса совершенно неважно является ли переносящее тепло электромагнитное излучение направленным или диффузнорассеянным.

Коэффициентом пропускания среды $k_{\text{пр}}$ называется отношение потока излучения Φ, прошедшего через среду, к потоку Φ_0, упавшему на ее поверхность: $k_{\text{пр}} = \Phi/\Phi_0$. Значение коэффициента пропускания тела зависит как от его размера, формы и состояния поверхности, так и от угла падения, спектрального состава и поляризации излучения. Различают коэффициенты: направленного пропускания (среда не рассеивает проходящего через нее излучения), диффузного пропускания (среда рассеивает все проникающее в нее излучение) и смешанного пропускания (с частичным рассеянием). Коэффициентом поглощения называется величина дополняющая коэффициент пропускания до 1.

Наконец, *оптической толщиной* слоя ξ называется безразмерная величина, характеризующая ослабление оптического излучения в среде за счет поглощения и рассеяния. Для оптически однородного слоя толщиной l оптическая толщина равна $\xi = \epsilon l$, где ϵ – *коэффициент объемного ослабления* оптического показателя среды. При этом *показатель ослабления* (показатель экстинкции) – величина, обратная расстоянию, на котором поток излучения, образующего параллельный пучок, уменьшается за счет поглощения и рассеяния в среде в e раз. Отсюда следует, что слой единичной оптической толщины ослабляет излучение в e раз. В общем случае, показатель ослабления равен сумме показателя поглощения и показателя рассеяния. Понятием оптической толщины пользуются при изучении мутных сред. Коэффициент смешанного пропускания связан с оптической толщиной соотношением $k_{\text{пр}} = \exp(-\xi)$.

Таким образом, именно оптическая толщина является подходящей экспериментально определяемой физической характеристикой оптических свойств среды, величина которой будет определять применимость теории радиационного переноса тепла.

Слой вещества, для которого $\xi > 1$, называется оптически толстым, такой слой практически непрозрачен для прямого излучения; если $\xi < 1$, слой называется оптически тонким. Так как показатель ослабления зависит от длины волны, то один и тот же слой вещества может быть оптически толстым для одного вида излучения и оптически тонким для другого. Нас же будет интересовать оптическая толщина среды в красной и инфра-красной областях спектра. Следовательно, мы будем называть среды *полупрозрачными*, с точки зрения радиационного теплопереноса, если они являются оптически тонкими в указанной части спектра.

Учитывая, что световой диапазон заключен в интервале длин волн 0,4 - 0,8мкм, приведем конкретные численные значения коэффициента пропускания $k_{\text{пр}}$ и оптической толщины ξ [56]-[58] на длине волны ≈ 0.8мкм, то есть на границе красной и инфра-красной частей спектра, при 1см толщины слоя:

Таблица 1

Оптические характеристики материалов

	кварц крис. SiO_2	кварц плав. SiO_2	ZnSe	KCl	NaCl	CaF_2	BaF_2	KBr	сапфир Al_2O_3	ZnS (ИК)
$k_{\text{пр}}$ (мкм)	0,75-0,8	0,85	0,71	0,94	0,87	0,95	0,93	0,87	0,88	0,75
ξ	0,22	0,16	0,34	0,06	0,14	0,05	0,07	0,14	0,13	0,28
ν	1,54	1,49	2,53	1,48	1,54	1,44	1,48	1,57	1,77	2,31
ε	2,37	2,22	6,4	2,19	2,37	2,07	2,19	2,47	3,13	5,34

На основе табличных значений показателя преломления ν вычислена диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \nu^2$. Магнитная проницаемость для указанных веществ далее будет полагаться порядка 1.

В табл.2 указаны значения удельного сопротивления для тех веществ, для которых в табл. 1 были приведены оптические характеристики. Это связно с тем, что, обычно, именно значения этой электрической характеристики материалов, которая эквивалентна, в физическом смысле, удельной электропроводности, приводятся в справочниках и таблицах физических величин [58]. В следующей табл. 3 мы указываем соответствующие этим значениям величины удельного сопротивления, рассчитанные в единицах системы СГСЭ (секундах).

Измерение удельных сопротивлений полупроводниковых материалов при высоких значениях температуры очень затруднено, и поэтому в справочной литературе имеется довольно мало ее значений. Мы приводим в нижеследующих таблицах их значения для материалов из табл. 1. В связи с трудностью измерения удельного сопротивления при высоких температурах, мы даем в табл. 2 его значения, полученные посредством экстраполяции, построенной на основе их значений при относительно невысоких температурах и теоретической экспоненциальной зависимости удельного сопротивления от температуры.

Таблица 2

Удельное сопротивление материалов $1/\sigma$ (Ом·см)

	кварц крис. SiO_2	кварц плав. SiO_2	ZnSe	KCl	NaCl	CaF_2	BaF_2	KBr	сапфир Al_2O_3	ZnS (ИК)
400°C	10^{10}	10^{10}	$6 \cdot 10^{12}$	10^8	10^8	$5 \cdot 10^{12}$	$5 \cdot 10^{12}$	10^8	$3 \cdot 10^{12}$	$6 \cdot 10^{12}$
600°C	10^8	10^8	10^{12}	10^6	10^6	$9 \cdot 10^{11}$	$9 \cdot 10^{11}$	10^6	$3 \cdot 10^{10}$	10^{12}
1000°C	10^6	10^6	10^{11}	10^3	10^3	$6 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{10}$	10^3	$1,5 \cdot 10^6$	10^{11}

Таблица 3

Удельное сопротивление материалов $1/\sigma$ (сек)

	кварц крис. SiO_2	кварц плав. SiO_2	ZnSe	KCl	NaCl	CaF_2	BaF_2	KBr	сапфир Al_2O_3	ZnS (ИК)
400°C	10^{-2}	10^{-2}	$6,7$	10^{-4}	10^{-4}	$5,5$	$5,5$	10^{-4}	3	$6,7$
600°C	10^{-4}	10^{-4}	1	10^{-6}	10^{-6}	1	1	10^{-6}	$0,03$	1
1000°C	10^{-6}	10^{-6}	$0,1$	10^{-9}	10^{-9}	$0,07$	$0,07$	10^{-9}	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$0,1$

Перевод в систему СГСЭ осуществляется посредством соответствия 1См = 1 $\text{Ом}^{-1} \approx 10^{12}$см/сек, так как 1См, по определению, есть

$$1\frac{\text{сек}^3 \cdot A^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}, \qquad \text{где} \quad 1A = 3 \cdot 10^9 \frac{\text{см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2}}{\text{сек}^2}.$$

Тогда

$$1\text{См} = \frac{9\cdot 10^{18}\text{г}\cdot\text{см}^3\cdot\text{сек}^3}{10^3\text{г}\cdot\text{сек}^4\cdot 10^4\text{см}^2} = 0,9\cdot 10^{12}\frac{\text{см}}{\text{сек}}\,.$$

Такие единицы измерения удельного сопротивления называются *статмо*. Таким образом, перевод единиц из табл. 2 в табл. 3 осуществляется по формуле:

$$1\text{Ом}\cdot\text{см} = 1,1\cdot 10^{-12}\text{сек}\,.$$

Значения удельной электропроводности, представленные в табл. 4, подсчитаны посредством обращения соответствующих значений из табл. 3.

Таблица 4

Электропроводность материалов σ (сек$^{-1}$)

	кварц крис. SiO_2	кварц плав. SiO_2	ZnSe	KCl	NaCl	CaF_2	BaF_2	KBr	сапфир Al_2O_3	ZnS (ИК)
400°C	$0,9\cdot 10^2$	$0,9\cdot 10^2$	$0,15$	$0,9\cdot 10^4$	$0,9\cdot 10^4$	0,18	0,18	$0,9\cdot 10^4$	0,3	$0,15$
600°C	$0,9\cdot 10^4$	$0,9\cdot 10^4$	$0,9$	$0,9\cdot 10^6$	$0,9\cdot 10^6$	1	1	$0,9\cdot 10^6$	30	$0,9$
1000°C	$0,9\cdot 10^6$	$0,9\cdot 10^6$	9	$0,9\cdot 10^9$	$0,9\cdot 10^9$	15	15	$0,9\cdot 10^9$	$6\cdot 10^5$	9

Так как электропроводность диэлектриков заключена в пределах $10^{-8}\div 10^{-17}$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ [60], то из полученной табл. 4 следует, что все представленные материалы являются диэлектриками при 400°C, а при 600°C и 1000°C вещества NaCl, KCl, KBr, SiO_2, Al_2O_3 превращаются в полупроводники, у которые электропроводность, согласно принятой классификации, заключена в пределах $10^{-7}\div 5\cdot 10^2$ Ом$^{-1}\cdot$см$^{-1}$ [61]. В нашем случае эти полупроводники являются высокоомными, так как их электропроводность существенно меньше 1 ($10^{-3}\div 10^{-6}$Ом$^{-1}\cdot$ см$^{-1}$).

Наконец, укажем значения величин, из числа тех, которые представлены в различных справочниках [56]-[59], которые необходимы для расчета теплопроводности указанных выше веществ. Для этого нам понадобятся коэффициент теплопроводности $\varkappa$, удельная теплоемкость (обычно, в справочниках указывается массовая теплоемкость c_m) и плотность ρ_m. В связи с тем, что в различных справочниках даются несколько отличающиеся друг от друга значения, измеренные при различных температурах, мы здесь приводим усредненные значения, привязывая их экстраполяцией к температуре 400°K. При этом для построения нашей теории совсем не важны точные значения указываемых величин, так как температуры, для которых должна быть применима предлагаемая нами теория изменяются в широких пределах, скажем, от 400°K вплоть до температуры плавления T_m каждого из веществ. В представленной табл. 5, $\varkappa$ измеряется в Вт/м·К, c_m – Дж/кг·К, ρ_m – г/см^3. Кроме указанных выше величин в этой таблицы даны значения соответствующих изучаемым веществам температур плавления.

Таблица 5

Тепловые характеристики материалов

	кварц крис. SiO_2	кварц плав. SiO_2	ZnSe	KCl	NaCl	CaF_2	BaF_2	KBr	сапфир Al_2O_3	ZnS (ИК)
$\varkappa$	8	1,42	14,1	6,5	6,2	9,7	7,1	4,8	24	17
c_m	800	773	370	700	870	890	460	450	760	510
ρ_m	2,65	2,21	5,27	1,98	2,17	3,18	4,83	2,75	3,96	4,09
T_mK	1700	1700	2070	1050	1100	1700	1650	1000	2580	2100

Для формулировки теории мы запишем приведенные в табл. 5 данные для коэффициента теплопроводности в единицах СГС, а также подсчитаем в единицах этой системы величину c_V. В результате, получаем следующую таблицу.

Таблица 6

Тепловые характеристики материалов (в системе СГС)

	кварц крис. SiO_2	кварц плав. SiO_2	ZnSe	KCl	NaCl	CaF_2	BaF_2	KBr	сапфир Al_2O_3	ZnS (ИК)
$\varkappa \left(10^5 \frac{\text{эрг}}{\text{см}\cdot\text{сек}\cdot\text{К}}\right)$	8	1,42	14,1	6,5	6,2	9,7	7,1	4,8	24	17
$c_V \left(10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3\cdot\text{К}}\right)$	2,1	1,7	1,9	1,4	1,9	2,8	2,2	1,2	3	2,1

При этом величина c_V рассчитывается по формуле $c_V = c_m\rho_m$, а величина массовой теплоемкости c_m переводится в систему единиц СГС следующим образом: 1 Дж/кг·К $= 10^4$ эрг/г $\cdot K$, то есть для того, чтобы c_V выразить в единицах эрг/см$^3 \cdot K$, нужно умножить на 10^4 произведение табличных величин c_m и ρ_m. Кроме того, для получения значений коэффициента теплопроводности $\varkappa$ в представленной таблице, нужно значения этого коэффициента в табл. 5 в системе единиц СИ перевести в систему СГС согласно правилу:

$$1 \text{ Вт/м} \cdot \text{К} = 1 \text{ Дж/м} \cdot \text{сек} \cdot \text{К} = 10^5 \text{ эрг/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{К}.$$

2.2. Условия для осуществления радиационного теплообмена в твердотельных полупрозрачных средах и малые параметры флуктуационной теории

Согласно сказанному в первой главе диссертации, для реализации такого эволюционного режима теплообмена, при котором оказывается необходимым особый теоретический подход при учете радиационного теплообмена в твердотельной среде, необходимо, чтобы она была полупрозрачной в красной и инфра-красной областях спектра электромагнитного излучения. В противном случае, влияние радиационного теплообмена сводится к незначительному изменению коэффициента теплопроводности среды. Это означает, что прозрачность среды ξ должна быть существенно меньше единицы. Из общефизических соображений это означает, что среда должна быть диэлектриком или высокоомным полупроводником, так как наличие у среды заметной электропроводности приводит к наведению в ней токов Фуко заметной величины при прохождении через нее электромагнитного излучения, а это, в свою очередь, приводит к поглощению энергии электромагнитной волны на очень малых расстояниях с трансформацией ее в тепловую энергию. Таким образом, при наличии заметной величины электропроводности, радиационный теплообмен реализуется на очень коротких расстояниях. Выбранные нами в предыдущем разделе, в качестве физических объектов для применения конструируемой нами теории, примеры сред демонстрируют описанную физическую связь между их прозрачностью на границе красной и инфра-красной областями спектра и проводимостью, которая для них имеет близкие по порядку величины значения.

Кроме указанного свойства реакции среды на электромагнитное возмущение, для проявления радиационного теплообмена необходимо, чтобы его неравновесное тепловое состояние характеризовалось наличием в нем больших градиентов температуры, так как, при малости градиентов температуры плотность потока энергии в среде, ответственная за перенос тепловой энергии, пропорциональна первой степени градиента температуры, и поэтому результирующее эволюционное уравнение, описывающее перенос тепла, снова превращается в уравнение теплопроводности с возможно зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности. Численные оценки и практика учета радиационного теплообмена в полупрозрачных твердотельных средах показывают, что физические условия, при которых такой теплообмен оказывается существенным, реализуются при градиентах температуры порядка нескольких десятком градусов на 1см и выше.

При этом среда в целом должны быть достаточно разогретой до нескольких сотен градусов по Цельсию для того, чтобы интенсивность теплового излучения каждого малой области среды была достаточно велика. Ниже, при построении флуктуационной теории, мы будем исходить из того, что линейные размеры L области среды, в которой происходит радиационный теплообмен, имеют порядок $L \sim 10 \div 10^2$см. При этом, учитывая, что температуры плавления T_m тех веществ, которые представлены в таблицах предыдущего раздела, имеют порядок от $1 \div 2 \cdot 10^3$С, указанные выше тепловые условия проявления радиационного теплообмена, действительно, реализуются в том случае, когда образцы среды разогреты до температур порядка нескольких сотен температур и вплоть до их температур плавления.

Ниже в этой главе будет сформулирована флуктуационная теория радиационного теплообмена такая, что предлагаемая на ее основе математическая модель оказывается очень сложной с математической точки зрения. Это приводит к сложности ее последовательного математического анализа. Результирующая формула для плотности потока $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ энергии флуктуационного электромагнитного поля, получаемая при выполнении математических операций, предписываемых моделью, представляет собой выражение, которое неудобно для практического применения при решении задач о переносе тепла в полупрозрачной среде. Его существенное упрощение достигается при учете тех конкретных физических условий, в которых оказывается существенен учет радиационного теплообмена. При этом выявляется ряд малых безразмерных параметров в исследуемой математической модели. Их наличие приводит к возможности упрощения результирующей формулы.

Пусть $\bar{L}$ – размер температурной неоднородности, который, в нашем случае, полагается равным линейному размеру такой области, в которой происходит изменение неоднородного распределения температуры $T(\mathbf{x}, t_0)$ на один градус в некоторый момент времени, начиная с которого происходит наблюдение за его изменением. Эта величина характеризуется обратным значением типичного градиента распределения температуры $T(\mathbf{x}, t_0)$. При указанных выше типичных градиентах температуры, при которых оказывается существенным радиационный теплообмен, $\bar{L} = 10^{-2} \div 10^{-1}$ см.

Заметим, что характерное время, за которое происходит изменение распределения температуры за счет процессов теплопроводности существенно больше, чем время $L/\bar{c}$, за которое тепловое электромагнитное излучение преодолевает расстояние скоростью $\bar{c}$ электромагнитного излучения в среде, равное размеру L области, в которой происходит теплообмен. При $L \sim 10$ см это время равно, по порядку величины, $\sim 3 \cdot 10^{-10}$сек. В то же время, естественное время для процессов теплопроводности определяется величиной $\bar{L}^2 \mathrm{c}_{_V}/\varkappa$. При этом в типичной физической ситуации с твердотельными диэлектриками и высокоомными полупроводниковыми веществами отношение $\varkappa/\mathrm{c}_{_V}$, исходя из значений табл. 6, равно по порядку величины $3 \div 8 \cdot 10^{-2}$ см^2/сек. Следовательно, типичное время для существенного изменения распределения температуры для рассматриваемых нами веществ при $\bar{L} \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$ см равно $10^{-3} \div 10^{-1}$ сек. В результате, получаем безразмерный малый параметр

$$(L/\bar{c})\Big/(\bar{L}^2 \mathrm{c}_{_V}/\varkappa) = \varkappa L/\bar{c}\bar{L}^2 \mathrm{c}_{_V} \ll 1\,, \tag{2.2.1}$$

по порядку величины равный $3 \cdot (10^{-9} \div 10^{-7})$, где $\bar{c}^2 = c^2/\varepsilon\mu$.

Как было сказано выше, для существенного влияния переноса излучения на теплообмен в среде нужно, чтобы среда была полупрозрачной в красной и инфра-красной областях спектра. Это означает, что введенная в первом разделе прозрачность среды ξ должна быть очень малой, и поэтому связанный с ней параметр $\gamma/\bar{c}$ размерности длины, где γ^{-1} – время затухания излучения в указанной части спектра, введенное в главе 1, который представляет собой характерное расстояние, на котором происходит затухание излучения, должен быть много больше, чем введенный размер $\bar{L}$. В этом случае возникает естественный безразмерный малый параметр $\gamma\bar{L}/\bar{c} \ll 1,$.

Наконец, так как твердотельная среда характеризуется еще одним параметром размерности длины, который представляется средним расстоянием между атомами (молекулами, ионами) среды ($\sim 10^{-8}$см). Совершенно ясно, что это расстояние должно быть намного меньше, чем $\bar{L}$. Однако, нужно потребовать больше. Для того чтобы тепловой обмен в среде допускал описание в представлении *сплошной среды*, то есть для того чтобы можно было записывать базовое эволюционное уравнение, описывающее теплообмен, в виде (1.3.21), нужно потребовать, чтобы $\bar{L}$ было намного больше, чем линейный размер r_0 области среды, в которой уже находится настолько большое число ее частиц, что относительные флуктуации термодинамических величин становятся очень малыми. Примем, что $r_0 \sim 10^{-6}$ см так, что в этом случае относительные флуктуации имеют порядок 10^{-3}. Тогда возникает еще один естественный безразмерный малый параметр $r_0/\bar{L}$, так как при $\bar{L} \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$ см имеем $r_0/\bar{L} \sim 10^{-5} \div 10^{-4}$.

На основе указанных типичных значений для параметров нашей модели заключаем, что в случае диэлектриков и высокоомных полупроводников выполняется следующее соотношение между введенными параметрами

$$10^{-9}\,\text{см} \sim \varkappa L/\bar{c}\bar{L}^2 \mathrm{c}_{V} \ll r_0/L \sim 10^{-5}\,\text{см} \tag{2.2.2}$$

в том случае, когда градиенты температуры являются большими, но среда еще не является сильно разогретой, и поэтому $\bar{L}$ имеет порядок 10^{-1} см (100° на 1 см). При наличии сильной разогретости среды порядка 1000°C, соотношение между двумя указанными параметрами превращается в следующее

$$10^{-7}\,\text{см} \sim \varkappa L/\bar{c}\bar{L}^2 \mathrm{c}_{V} \ll r_0/L \sim 10^{-4}\,\text{см}\,. \tag{2.2.3}$$

Потребуем теперь чтобы радиационный теплообмен в полупрозрачной среде можно было описывать на основе эволюционного уравнения вида (1.3.21) для сплошной среды, но при этом оказывались существенными градиенты температуры порядка выше первого в плотности потока энергии, то есть прозрачность среды была довольно большой (поглощение электромагнитного излучения не является очень сильным). Тогда необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma \bar{L}/\bar{c} \ll r_0/\bar{L}\,. \tag{2.2.4}$$

Таким образом, темой нашего дальнейшего исследования является построение теории радиационного теплообмена без использования оптических представлений первой главы в случае, когда одновременно имеют место неравенства

$$\varkappa L/\bar{c}\bar{L}^2 \mathrm{c}_{V} \ll r_0/\bar{L}\,, \quad \gamma \bar{L}/\bar{c} \ll r_0/\bar{L}\,. \tag{2.2.5}$$

С этим связано, как мы видим, введенное нами ограничение (2) на величину температурных градиентов. В противном случае, невозможно было удовлетворить одновременно обеим неравенствам (5).

2.3. Основы флуктуационного подхода в теории радиационного теплообмена в среде

В этом разделе мы изложим идейные основы флуктуационного подхода для описания радиационного теплообмена в полупрозрачных средах типа диэлектриков и высокоомных полупроводников и дадим базовую теоретическую модель для этого описания на основе уравнений Максвелла.

Физические основы предлагаемой нами теории состоят в следующем. Электромагнитное излучение, переносящее тепло внутри среды, создается тепловым движением составляющих среду заряженных частиц. В силу хаотичности теплового движения частиц, электромагнитное изучение также является хаотическим. Тогда перенос тепла излучением, состоящий из сменяемых друг друга актов излучения и поглощения частицами среды распространяющегося в ней электромагнитного излучения, является результирующим процессом совместной хаотической эволюции атомов (молекул, ионов) среды, их электронных оболочек и электромагнитного излучения. В силу хаотичности эволюции такой системы, все физические величины, характеризующие ее состояние в каждый момент времени, носят случайный характер, и поэтому их описание должно быть статистическим. Следовательно, описание эволюции системы также должно быть статистическим.

Последовательное микроскопическое описание эволюции описанной хаотической системы, как уже было сказано ранее, является довольно сложным уже на этапе введения адекватного набора переменных, характеризующих состояние системы. Поэтому в настоящей работе мы, следуя идеям подхода, предложенного в работах [23]-[29], будем строить его в терминах термодинамических флуктуаций макроскопических величин, вполне характеризующих «среда+излучение». При таком подходе электромагнитное излучение, переносящее тепло, порождается тепловыми флуктуациями локального термодинамического состояния среды. При этом микроскопический механизм перехода энергии поля в тепло в рамках указанного подхода не конкретизируется. Указанные тепловые флуктуации определяют флуктуации зарядов в среде и наведенных ими токов. При этом динамика флуктуаций среды, носящая статистический характер, должна описываться в терминах математической теории случайных процессов. Тогда, как следствие, электромагнитное поле, ответственное за перенос тепла в среде, является стохастическим и его распространение в среде также должно описываться в терминах теории случайных процессов.

Стохастическое электромагнитное поле в рамках описанного флуктуационного подхода, может проявляться в средах даже с очень малой электропроводностью вследствие наличия а них короткодействующих флуктуаций зарядов и токов. Это связано с тем, что амплитуда флуктуаций возрастает при достаточно высокой средней температуре в среде так, что при тепловые колебания атомов (ионов) среды приводят даже в том случае, когда она является диэлектрической, к заметным флуктуациям электрических зарядов на пространственных масштабах порядка в несколько межатомных расстояний, величина которых оказывается существенной для учета, вызванного ими теплового излучения.

Итак, описание флуктуирующей среды вместе с распространяющимся в ней излучением мы будем производить в терминах случайных полей (процессов). При этом, следуя традициям теории вероятностей, мы будем на письме различать случайные поля (процессы) от их конкретных неслучайных (средних) значений. В связи с этим, все случайные поля (процессы) ниже отмечаются сверху знаком «тильда». Таким образом, исходным положением для математической формулировки флуктуационной теории радиационного теплообмена является то, что тепловое стохастическое электромагнитное поле в каждой пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t\rangle$ описывается значениями пары векторных случайных полей $\langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)\rangle$ – соответственно мгновенными значениями напряженностей электрического и магнитного полей теплового излучения, порождаемого разогретой средой. На основе этой пары определяется плотность потока энергии стохастического электромагнитного поля [62], [76]

$$\tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi}[\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}](\mathbf{x}, t)\,, \tag{2.3.1}$$

где $c \sim 3 \cdot 10^{10}$ см/сек – скорость света в вакууме. Таким образом, поле $\tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x}, t)$ также является случайным полем.

Так как длины волн теплового электромагнитного поля лежат в красной и инфра-красной областях спектра, то спектральные разложения стохастических полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$ сосредоточенные в этой части спектра, быстро изменяются на расстояниях порядка $\sim 10^{-4}$ см и в течение отрезков времени порядка $\sim 10^{-14}$ сек, соответствующим указанным длинам волн. В то же время, характерная длина для процесса теплопроводности, согласно сказанному в предыдущем разделе, мы полагаем имеет порядок 10^{-1} см, а характерное время – $\bar{L}^2 \mathrm{c}_V/\varkappa = 10^{-1} \div 1$ сек. Поэтому для вычисления такой плотности потока энергии, которая может быть использована в уравнении (1.3.21), необходимо усреднить случайное поле, определяемое формулой (1) по пространственным областям имеющим много больший размер, чем характерная длина волны стохастического электромагнитного поля, но много меньший, чем характерная длина для процесса теплопроводности. Кроме того, это случайное поле также должно быть усреднено по временным отрезкам, которые имеют длительность, много большую чем характерный период колебаний теплового излучения, но много меньший, чем характерное время теплопроводности. Такое усреднение позволяет не учитывать малые быстрые изменения дивергенции плотности потока излучения $(\nabla, \tilde{\boldsymbol{S}})$ по пространству и времени, которые не имеют отношения к процессу переноса тепла. Из теории случайных процессов известно, что указанное пространственно-временное усреднение, при наличии свойства *эргодичности* у пары случайных полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$, эквивалентно усреднению по распределению вероятностей электромагнитного поля.

Таким образом, плотность потока энергии теплового электромагнитного излучения, которая используется в (1.3.21), определяется, вследствие эргодичности, математическим ожиданием $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T] = \langle\!\langle\, \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x}, t) \rangle\!\rangle$. Здесь и далее всюду по тексту двойные угловые скобки обозначают усреднение по совместному распределению вероятностей случайных полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$. Тогда, для формулировки замкнутой, с математической точки зрения, модели, описывающей перенос тепла излучением, нужно построить адекватную стохастическую модель теплового электромагнитного поля и, в ее рамках, вычислить математическое ожидание $\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x}, t) \rangle\!\rangle$.

Будем считать, что случайные реализации $\langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \rangle$ стохастического электромагнитного поля в среде удовлетворяют системе уравнений Максвелла в *сплошной* диэлектрической среде в пренебрежении ее дисперсией

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}} = [\nabla, \tilde{\mathbf{H}}]\,, \qquad && (\nabla, \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\tilde{\rho}\,, \\
&\frac{\mu}{c}\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} = -[\nabla, \tilde{\mathbf{E}}]\,, && (\nabla, \tilde{\mathbf{H}}) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

При записи этой системы уравнений использован векторный дифференциальный оператор Гамильтона ∇.

В условиях пренебрежения дисперсией среды величины ε и μ – средние значения электрической и магнитной проницаемостей диэлектрической среды в интересующей нас области спектра. Заметим, что величины ε и μ, вообще говоря, могут зависеть от температуры и эти зависимости $\varepsilon(T)$, $\mu(T)$ могут быть существенны при больших перепадах температуры на расстояниях порядка характерного размера $\bar{L}$. В этом случае ее необходимо учитывать в задачах о переносе тепла излучением. Тогда значение температуры в этих зависимостях должно полагаться равным локальной температуре $T(\mathbf{x}, t)$ и, при учете такой зависимости, в уравнениях Максвелла должны появиться пространственные и временные производные от $\varepsilon(T(\mathbf{x}, t))$ и $\mu(T(\mathbf{x}, t))$. Однако, величина этих производных, в силу указанных медленных зависимостей по сравнению с характерными для теплового излучения масштабами длины и времени чрезвычайно мала. Поэтому эти производные не учтены в уравнениях (2). Таким образом, в рамках принятого приближения, мы считаем, что ε и μ не зависят от $\langle \mathbf{x}, t \rangle$.

В системе уравнений (2) поля $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$, которые, с физической точки зрения, представляют собой плотности электрического тока и заряда соответственно, являются пространственно распределенными источниками теплового электромагнитного поля, обеспечивающего радиационный теплоперенос в среде. Они, с математической точки зрения, являются случайными полями, описывающими флуктуации плотностей электрического тока и заряда в среде, которые возникают в областях среды, которые содержат большое число частиц, но имеющих малый линейный размер r_0. Существенно, что этот размер намного превосходит средние расстояния между частицами и такой, что он по порядку величины совпадает с характерной длины волны $10^{-5} \div 10^{-4}$см излучения, которое возникает вследствие тепловых флуктуаций.

Решения системы уравнений (2) полностью определяется источниками $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$, а также граничными и начальными условиями для полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$, соответствующими изучаемой физической ситуации. Так как источники являются стохастическими, то решения системы уравнений (2) представляют случайные реализации случайных полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$, распределение вероятностей которых полностью определяется распределениям и вероятностей случайных полей $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ и, может быть, распределениями вероятностей начальных и граничных условий, если таковые также оказываются случайными.

Система уравнений (2) является переопределенной, то есть состоит из большего числа уравнений, чем число искомых функций. Как известно, условием ее непротиворечивости, то есть наличия у нее богатого семейства решений, является согласованность уравнений, которая выражается в виде *уравнения непрерывности*,

$$\dot{\tilde{\rho}} + (\nabla, \tilde{\mathbf{j}}) = 0\,, \tag{2.3.3}$$

которому должны быть подчинены источники $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$.

В следующих разделах этой главы будут конкретизированы тип случайных полей и математическая задача для системы стохастических дифференциальных уравнений (2), решения которых описывают радиационный теплообмен.

2.4. Флуктуации микроскопических распределений зарядов и электрических токов в слабопроводящих средах

В этом разделе дадим окончательное определение гауссовского стохастического электромагнитного поля, описанного в разделе 2.3, распространяющегося в средах малой электропроводностью: в диэлектриках и высокоомных полупроводниках. Это поле порождается флуктуациями электрических токов и ответственно за радиационный теплоперенос с таких средах. Ввиду того, что электромагнитное поле, определяемое как решение стохастических дифференциальных уравнениях (3.2) на основе флуктуаций $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$ плотностей электрических зарядов и токов, а флуктуации плотности зарядов $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$, в свою очередь, согласно уравнению (3.3), определяются через флуктуации плотностей токов $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$, то для завершения построения базовой теоретической модели радиационного теплопереноса достаточно определить случайное поле $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$.

Будем считать, что флуктуационное случайное поле $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$ мало, и поэтому его можно считать гауссовским. Более того, наличие радиационного теплопереноса не может приводить к появлению каких-либо заметных направленных электрических токов, то можно считать, что случайное поле $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$ обладает нулевым средним значением $\left\langle\!\left\langle \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) \right\rangle\!\right\rangle = 0$. Следовательно, согласно тому, что уравнение (3.3) определяет линейную связь между полями $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$, поле $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ также является гауссовским и имеет нулевое среднее значение $\left\langle\!\left\langle \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \right\rangle\!\right\rangle = 0$, то есть равны нулю средние значения флуктуаций электрических зарядов. Для полного задания гауссовского случайного поля с нулевым средним значением нужно, определить его корреляционную функцию.

Таким образом, далее, содержанием этого раздела является описание гауссовского случайного поля $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$, которое завершит формулировку базовой модели флуктуационной теории радиационного теплопереноса в полупрозрачных диэлектриках и высокоомных полупроводниках.

Прежде всего, запостулируем следующий вид флуктуационного поля плотности электрических токов

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) = \sigma \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x}, t)\,. \qquad (2.4.1)$$

Формула (1) означает, что плотность тока $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t)$, в нашей модели, мыслится составленной из собственно стохастического источника $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x}, t)$ электромагнитного поля в виде «внутренней электродвижущей силы» в среде, которая возникает вследствие тепловых флуктуаций, и из плотности тока, наведенного стохастическим электромагнитным полем. Эта часть плотности $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$ мы положили в виде закона Ома $\sigma\tilde{\mathbf{E}}$. При этом заметим, что коэффициент $\sigma > 0$, играющий роль проводимости, вообще говоря, не является истинной макроскопической электропроводностью среды, которая предполагается очень малой в рассматриваемой физической ситуации. Он выполняет роль «эффективной проводимости», отличие которой от нуля гарантируется так называемой *флуктуационно-диссипационной теоремой* (см., например, [25]). Согласно этой теореме, при корректном построении стохастических динамических систем, описывающих эволюцию физической системы под действием внешних случайных воздействий со стороны флуктуирующей среды, с необходимостью в уравнениях движения должна присутствовать регулярное (неслучайное) диссипативное воздействие со стороны среды, пропорциональное решениям уравнения движения с неслучайным коэффициентом, который также является характеристикой среды. С математической точки зрения, присутствие такого воздействия на систему необходимо для наличия стационарного эволюционного режима у системы с аддитивным шумом. В дальнейшем, мы будем рассматривать σ как некоторый феноменологический коэффициент, значение которого может иметь только лишь такой же порядок величины, как и истинной электропроводности среды. *По нашему мнению, именно благодаря феноменологической связи между интенсивностью флуктуаций и их затуханием, утверждаемом флуктуационно-диссипационной теоремой, естественным образом, находит свое объяснение механизм радиационного теплопереноса в среде.*

Ввиду связи (1), для построения модели достаточно определить гауссовское случайное поле $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x},t)$, которое служит собственно стохастическим источником электромагнитного поля , несмотря на то, что процесс происходит в диэлектрике (или в высокоомном полупроводнике). Интенсивность этого источника должна зависеть функционально от локальной температуры $T(\mathbf{x},t)$ и поэтому может изменяться по пространству и времени. Однако это «неслучайное» изменение интенсивности является гораздо более медленным по сравнению с результирующим изменением стохастического источника $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x},t)$ и самого теплового электромагнитного поля $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t),\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$. В связи с этим, запишем поле $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x},t)$ в виде

$$\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x},t) = a(\mathbf{x},t;T)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)\,. \tag{2.4.2}$$

Здесь, посредством $a(\mathbf{x},t;T)$, обозначена интенсивность источника, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$ – некоторое «стандартное» гауссовское случайное поле с нулевым средним значением $\langle\!\langle \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t) \rangle\!\rangle = 0$, которое не зависит от температуры, но которое отражает важные физические свойства флуктуационного источника $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x},t)$ и, следовательно, теплового электромагнитного поля – решений $\langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t) \rangle$ стохастических уравнений Максвелла (3.2). К таким свойствам мы относим: пространственную однородность, изотропность, инвариантность относительно отражений пространства, понимаемых в среднем. При этом интенсивность $a(\mathbf{x},t;T)$ должна быть сконструирована на основе общефизических соображений, исходя из положения, что электромагнитное поле, осуществляющее радиационный теплоперенос, представляет из себя фотонный газ с некоторой зависящей от локальной температуры $T(\mathbf{x},t)$ функцией распределения по энергиям.

Заметим, что стохастический источник $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$ должен содержать, с вероятностью единица, вихревую часть (флуктуационные «токи Фуко»). В самом деле, на основании (3.3), имеем

$$\dot{\tilde{\rho}} + \gamma\tilde{\rho} + (\nabla, \tilde{\boldsymbol{j}}) = 0\,, \tag{2.4.3}$$

где

$$\gamma = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\,. \tag{2.4.4}$$

Так как коэффициент удельной электропроводности σ является, вообще говоря, функцией от локальной температуры, то, вследствие зависимости последней от $\mathbf{x}$ и t, он также зависит от времени и пространственной точки. Однако, при получении уравнения (3), мы пренебрегли этими медленными зависимостями, точно также как мы поступили по отношению к величинам ε и μ, когда положили их в системе уравнений (3.2) постоянными. Тогда, в случае отсутствия вихревой части, имеем равенство $(\nabla, \tilde{\boldsymbol{j}}) = 0$, и поэтому флуктуации заряда стремятся к нулю с вероятностью 1 при неограниченном возрастании времени. Именно с наличием вихревой части связано излучение переносящих тепло электромагнитных волн.

Таким образом, система эволюционных уравнений, описывающая тепловое электромагнитное поле, представляется системой (3.2), в которой эволюционное уравнение для электрической составляющей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$, используя (1),(2),(4), заменяется на уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} + \gamma\tilde{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\, a\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{c}{\varepsilon}[\nabla, \tilde{\mathbf{H}}]\,, \tag{2.4.5}$$

а уравнение (3) заменяется на

$$\dot{\tilde{\rho}} + \gamma\tilde{\rho} + (\nabla, a\tilde{\boldsymbol{\varphi}}) = 0\,, \tag{2.4.6}$$

Если пренебречь в этой системе уравнений медленными зависимостями интенсивности $a(\mathbf{x}, t; T)$ от $\mathbf{x}$ и t через посредством ее функциональной зависимости от $T(\mathbf{x}, t)$, то она представляет собой систему стохастических уравнений с аддитивным шумом $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ (см., например, [68]). В частности, таковым является самосогласованное уравнение (6).

Для завершения построения математической модели флуктуационной теории радиационного теплопереноса нужно задать случайное гауссовское поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ с нулевым средним значением, то есть вид его парной корреляционной функции

$$K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \left\langle\!\left\langle \tilde{\varphi}_{j_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \tilde{\varphi}_{j_2}(\mathbf{x}_2, t_2) \right\rangle\!\right\rangle , \tag{2.4.7}$$

которой оно полностью определяется. Мы не будем задавать явный вид этой функции, а укажем только те ее общие, вытекающие из физики процесса свойства, которые оказываются необходимыми для построения теории.

Непосредственно из определения (7) следует, что имеет место тождество

$$K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = K_{j_2 j_1}(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) . \tag{2.4.8}$$

По физическим причинам, мы считаем случайное поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ стохастически трансляционно инвариантным (однородным) по $\mathbf{x}$ и стационарным по t в смысле теории случайных процессов. Ввиду гауссовости поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$, эти его свойства выражаются следующим образом в терминах корреляционной функции,

$$K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) . \tag{2.4.9}$$

Учитывая (8), функция $K_{j_1 j_2}(\cdot, \cdot)$ обладает свойством

$$K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}, t) = K_{j_2 j_1}(-\mathbf{x}, -t) . \tag{2.4.10}$$

Точно также по физическим причинам мы считаем, что поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ стохастически изотропно. В терминах корреляционной функции $K_{j_1 j_2}(\cdot, \cdot)$ это свойство выражается следующим образом:

$$K_{j_1 j_2}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, t_1 - t_2) = K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, t_1 - t_2) \delta_{j_1, j_2} , \tag{2.4.11}$$

При этом мы допускаем некоторую математическую некорректность. Функции $K_{j_1 j_2}(\cdot, \cdot)$ в правых частях обоих равенств (9) и (10) мы обозначаем одной и той же буквой.

Учитывая свойство (11), из (10) следует, что

$$K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, t_1 - t_2) = K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, t_2 - t_1)\,,$$

то есть $K(|\mathbf{x}|, t) = K(|\mathbf{x}|, |t|)$,

$$K_{j_1,j_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, |t_1 - t_2|)\delta_{j_1,j_2}\,. \tag{2.4.12}$$

Эта формула выражает свойство обратимости во времени случайного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$, когда поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, -t)$ обладает таким же распределением вероятностей, что и исходное.

Если корреляционная функция поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ имеет вид (12), то, в пренебрежении медленными зависимостями локальной температуры от $\mathbf{x}$ и t, стохастический источник $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t; T)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ в уравнениях (5), (6) является стохастически однородным и изотропным по $\mathbf{x}$, а также стационарным и обратимым по t, что оправдывает сделанные нами предположения о структуре корреляционной функции $K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2)$.

Введем дополнительно некоторые предположения об общих свойствах функции $K(r, t)$, $r = |\mathbf{x}|, t > 0$, которые связаны с физическим смыслом случайного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$. Так как случайное поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$, по физическим соображениям, должно обладать чрезвычайно малым временем корреляций, которые должны исчезать на временно́м промежутке порядка нескольких периодов колебаний электромагнитного поля в красной области спектра, то мы положим, что $K(r, t) \sim \delta(t)$, то есть

$$K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, |t_1 - t_2|) = K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)\delta(t_1 - t_2)\,, \tag{2.4.13}$$

где мы снова допускаем некоторую вольность, обозначая одной и той же буквой K в равенствах (12) и (13) различные функции. В дальнейшем, это не приведет к недоразумению. Заметим, что вид (13) функции $K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, |t_1 - t_2|)$ предполагает не только ее сильную локализацию по времени. Несмотря на разделение временной и пространственной зависимостей в корреляционной функции $K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, |t_1 - t_2|)$, зависимости от $\mathbf{x}$ и t у случайного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ являются скоррелированными.

Вид (13) функции K показывает, что случайное поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ является обобщенным гауссовским векторным случайным полем типа «белого шума» по временно́й переменной.

Корреляции поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ по пространственным переменным также являются сильно короткодействующими. Они исчезают на расстояниях порядка r_0 (см. раздел 2.2), то соответствует длине волны электромагнитного излучения в красной (инфра-красной) области спектра $\sim 10^{-6}$см. Этот масштаб размерности длины будет, в дальнейшем, предполагается наименьшим среди всех величин размерности длины в нашей теории. Для тех сред, у которых это положение имеет место корреляционная функция флуктуационного электрического тока сосредоточена на r_0. Однако, по причинам, которые будут ясны из дальнейшего математического анализа в следующей главе, мы не можем положить, что функция $K(r,t)$ пропорциональна $\delta(r)$, по аналогии с временно́й переменной. Поэтому будем считать, что имеет место представление

$$K(r) = r_0^{-3} Q(r^2/2r_0^2)\,, \tag{2.4.14}$$

где функция $Q(r)$ сосредоточена в области с линейным размером порядка единицы. Будем считать, что функция является абсолютно интегрируемой

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty\,, \tag{2.4.15}$$

что, учитывая (13), дает

$$K = \int_0^\infty Q(\xi^2/2)\xi^2 d\xi < \infty\,. \tag{2.4.16}$$

Функция $K(r)$ в формуле (13) положительно определена, что является следствием теоремы Бохнера-Хинчина для корреляционных функций (см. раздел 2.4).

После задания случайного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$, определяющего стохастический источник $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x},t)$ в системе стохастических дифференциальных уравнений, в которую входят уравнения (5) и (6), решения полной системы эволюционных уравнений для теплового электромагнитного поля полностью определены при фиксации начальных и граничных условий. Следовательно, случайная функция $\tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t)$, определяемая равенством (3.1), является определенным функционалом от распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ и его математическое ожидание

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T] = \left\langle\!\left\langle \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t) \right\rangle\!\right\rangle = \frac{c}{4\pi} \left\langle\!\left\langle [\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}] \right\rangle\!\right\rangle (\mathbf{x},t;T) \tag{2.4.17}$$

определяется распределением вероятностей случайного поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$.

2.5. Стохастическое электромагнитное поле в диэлектриках и высокоомных полупроводниках

В этом разделе мы осуществим предварительный анализ построенной в предыдущем разделе математической модели теплового электромагнитного поля в среде с малой электропроводностью и покажем, что на ее основе возможно построение стационарного случайного бесконечномерного процесса Орнштейна-Уленбека. Так как переход от произвольного случайного процесса, порождаемого решениями системой уравнений (3.2), (4.5), (4.6) при произвольных фиксированных начальных условиях для полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t_0)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t_0)$ и для распределении температуры $T(\mathbf{x}, t_0)$ к стационарному эволюционному режиму происходит за время, много меньшее, чем характерное время процесса теплопроводности (см. раздел 2.2.), то именно этот случайный процесс будет играть главную роль при вычислении в следующей главе плотности потока энергии $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ в нашей флуктуационной теории радиационного теплопереноса.

Введем в рассмотрение обобщенные Фурье-разложения случайных реализаций стохастических полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$,

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t) \exp[i(\mathbf{k}, \mathbf{x})] d\mathbf{k}\,, \quad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t) \exp[i(\mathbf{k}, \mathbf{x})] d\mathbf{k}\,. \tag{2.5.1}$$

Здесь $\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t)$ и $\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t)$ являются обобщенными случайными полями относительно $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$.

Подставим Фурье-разложения (1) в уравнения (3.2), (4.5). Тогда, в силу однозначности их определения, получаем для каждого фиксированного $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ конечную систему уравнений для обобщенных Фурье-образов

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t) \ + \gamma \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t) + \frac{4\pi}{\varepsilon} \tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k}, t) = \frac{ic}{\varepsilon} [\mathbf{k}, \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t)]\,, \tag{2.5.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t) \ = -\frac{ic}{\mu} [\mathbf{k}, \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t)]\,, \tag{2.5.3}$$

$$(\mathbf{k}, \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t)) = -\frac{4\pi i}{\varepsilon} \tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k}, t)\,, \quad (\mathbf{k}, \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t)) = 0\,, \tag{2.5.4}$$

$$\dot{\tilde{\rho}}(\mathbf{k}, t) + \gamma \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) + i(\mathbf{k}, \tilde{\tilde{\mathbf{j}}}(\mathbf{k}, t)) = 0\,, \tag{2.5.5}$$

где введены обобщенные образы Фурье $\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k}, t)$ для реализаций плотности распределения заряда

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k}, t) \exp[i(\mathbf{k}, \mathbf{x})] d\mathbf{k}\,, \tag{2.5.6}$$

и $\tilde{\tilde{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k}, t)$ для флуктуационной части $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x}, t)$ плотности электрического тока

$$a(\mathbf{x}, t; T) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{\tilde{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k}, t) \exp[i(\mathbf{k}, \mathbf{x})] d\mathbf{k}\,. \tag{2.5.7}$$

В силу вещественности всех рассматриваемых нами полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)$, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$, $\tilde{\rho}(\mathbf{x},t)$, их фурье-образы с вероятностью 1 обладают свойствами

$$\bar{\tilde{E}}_l^*(\mathbf{k},t) = \bar{\tilde{E}}_l(-\mathbf{k},t)\,, \quad \bar{\tilde{H}}_l^*(\mathbf{k},t) = \bar{\tilde{H}}_l(-\mathbf{k},t)\,,$$

$$\bar{\tilde{\rho}}^*(\mathbf{k},t) = \bar{\tilde{\rho}}(-\mathbf{k},t)\,, \quad \bar{\tilde{j}}_l^*(\mathbf{k},t) = \bar{\tilde{j}}_l(-\mathbf{k},t)\,, \qquad l=1,2,3\,. \quad (2.5.8)$$

Введем в рассмотрение обобщенное комплекснозначное гауссовское случайное поле $\bar{\tilde{\varphi}}_j(\mathbf{k},t)$ с нулевым средним значением посредством фурье-разложения

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k},t)\exp[i(\mathbf{k},\mathbf{x})]d\mathbf{k}\,. \quad (2.5.9)$$

Для него также имеет место $\bar{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}^*(\mathbf{k},t) = \bar{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}(-\mathbf{k},t)$, в силу вещественности поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$.

Это обобщенное случайное поле обладает парной корреляционной функцией

$$\bar{K}_{j_1 j_2}(\mathbf{k}_1,t_1;\mathbf{k}_2,t_2) = \left\langle\!\left\langle \bar{\tilde{\varphi}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\tilde{\varphi}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle. \quad (2.5.10)$$

Подставляя в (10) выражения для реализаций $\bar{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k},t)$ через $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$ и пользуясь определением корреляционной функции $K(\cdot)$, находим

$$\bar{K}_{j_1 j_2}(\mathbf{k}_1,t_1;\mathbf{k}_2,t_2) = \delta_{j_1,j_2}\bar{K}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1)\delta(t_2-t_1)\,, \quad (2.5.11)$$

где

$$\bar{K}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} K(|\mathbf{x}|)\exp[-i(\mathbf{k},\mathbf{x})]d\mathbf{x}\,. \quad (2.5.12)$$

Так как функция $K(|\mathbf{x}|)$ вещественна, то, как и в (8), функция $\bar{K}(\cdot)$ всегда обладает свойством $\bar{K}^*(\mathbf{k}) = \bar{K}(-\mathbf{k})$. Однако, ввиду центральной симметрии функции $K(|\mathbf{x}|)$, можно утверждать большее. Функция $\bar{K}(\mathbf{k})$ вещественна и центрально симметрична в $\mathbf{k}$-пространстве, то есть имеет вид $\bar{K}(|\mathbf{k}|)$. В самом деле, из (12) следует, что

$$\bar{K}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty K(r)r^2dr\int_0^1 \exp[-i|\mathbf{k}|r\eta]d\eta = \frac{1}{2\pi^2|\mathbf{k}|}\int_0^\infty K(r)r\big(\sin|\mathbf{k}|r\big)dr\,.$$

Таким образом, формулу (11) запишем в виде

$$\bar{K}_{j_1 j_2}(\mathbf{k}_1,t_1;\mathbf{k}_2,t_2) = \delta_{j_1,j_2}\bar{K}(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2|)\delta(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1)\delta(t_2-t_1)\,, \quad (2.5.13)$$

где, как и выше, мы подразумеваем в этой формуле использование функции $\bar{K}(\cdot)$ в другом смысле.

Из формул (7) и (9) следует, что

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}-\mathbf{k}',t)\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}', \tag{2.5.14}$$

где $\bar{a}(\mathbf{k},t)$ – фурье-образ интенсивности $a(\mathbf{x},t;T)$. Тогда поля $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)$, ввиду их линейных связей (12) и (5) с полем $\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k},t)$, являются комплекснозначными и гауссовскими случайными полями. Они также обладают нулевыми средними значениями $\langle\!\langle \tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k},t)\rangle\!\rangle = 0$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\rangle\!\rangle = 0$.

Так как система уравнений при каждом фиксированном $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3$ конечна, то она однозначно разрешима при заданных начальных условиях для реализаций обобщенных случайных полей $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)$. Это означает, что она определяет с математической точки зрения, при фиксации начальных условий, некоторый случайный процесс $\langle\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t),\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)\rangle$, моделирующий тепловое электромагнитное поле, которому посвящен следующий раздел.

2.6. Построение случайного процесса $\langle\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t),\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)\rangle$

В этом разделе мы определим траектории двухкомпонентного обобщенного векторного случайного процесса $\langle\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t),\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)\rangle$, который является решением системы стохастических дифференциальных уравнений (5.2)-(5.5) с некоторыми начальными условиями, в пренебрежении временно́й зависимостью амплитуды $a(\mathbf{x},t;T)$.

Заметим, прежде всего, что из физических соображений следует, что начальные условия для случайных полей $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$ и $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)$ становятся несущественными по прошествии временного периода, много большего времени характерного времени теплопроводности $\mathrm{c}_V\bar{L}^2/\varkappa$. Они никак не должны сказываться на значения математических ожиданий всевозможных функций от этих полей. Кроме того, этот временной период длительности $\mathrm{c}_V\bar{L}^2/\varkappa$ должен быть много больше, чем характерное время τ, связанное с тепловым излучением так, чтобы величина $\hbar\tau^{-1}/\mathrm{k}$ имела порядок средней температуры среды. Тогда, так как поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$ является стационарным по времени, то, при указанном переходе в асимптотическую область изменения переменной t при пренебрежении зависимостью от времени распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ в амплитуде $a(\mathbf{x},t;T)$ и, тем самым, в источниках $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\rho}(\mathbf{k},t)$, стохастические поля $\langle\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)\rangle$, подчиняющиеся уравнениям (5.2)-(5.4), можно также рассматривать как стационарные по времени. Такое пренебрежение временной зависимостью соответствует переходу в асимптотическую область $t \gg c_V \bar{L}^2/\varkappa \sim 10^{-3} \div 10^{-1}$сек (см. разд. 2.2).

2.6.1. Случайный процесс $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t)$. Пользуясь описанными физическими соображениями, построим случайный процесс, пренебрегая временно́й зависимостью функции $a(\mathbf{x}, t; T)$ и, тем самым, и у функции $\bar{a}(\mathbf{k}, t)$. Запишем формальное решение уравнение (5) с произвольным начальным условием $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t_0)$,

$$\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t) = e^{-\gamma(t-t_0)}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t_0) - i\int\limits_0^t e^{-\gamma(t-s)}(\mathbf{k}, \tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k}, s))ds\,.$$

Подставим в эту формулу выражение (5.14),

$$\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t) = e^{-\gamma(t-t_0)}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t_0) - \frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}'\int\limits_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)}\bar{a}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', s)(\mathbf{k}, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}', s))ds\,. \tag{2.6.1}$$

Считая в этой формуле функцию $\bar{a}$ независящей от времени, то есть положив ее равной некоторой усредненной функции $\bar{a}(\mathbf{k})$, представим эту формулу в виде

$$\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t) = e^{-\gamma(t-t_0)}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t_0) - \frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')d\mathbf{k}'\int\limits_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)}(\mathbf{k}, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}', s))ds\,. \tag{2.6.2}$$

Формула (2) определяет траектории случайного процесса $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t)$, распределение вероятностей, которого индуцируется распределением вероятностей случайного процесса $\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}', t))$ и случайной величины $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t_0)$. Считая последнюю случайную величину гауссовской, получим, что процесс $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t)$ является гауссовским, так как он представляет собой линейное преобразование гауссовского случайного процесса.

Благодаря δ-функционной зависимости от времени t корреляционной функции $\bar{K}_{j_1j_2}(\mathbf{k}_1, t_1; \mathbf{k}_2, t_2)$ обобщенное гауссовское поле $\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}', t)$ ведет себя подобно «белому шуму» при каждом фиксированном $\mathbf{k}'$, то есть $\int_0^t \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}', s)ds$ при каждом фиксированном $\mathbf{k}'$ представляет собой винеровский процесс [69]. Следовательно, внутренний интеграл по времени имеет смысл в среднем квадратичном. Тогда, при указанной аппроксимации, случайный процесс $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)$, согласно формуле (2), по каждой его траектории приближается при $t\to\infty$ комплекснозначным стационарным марковским гауссовским процессом, аналогичным известному процессу Орнштейна-Уленбека.

2.6.2. Траектории случайного процесса $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t), \tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$. Выпишем решения системы линейных уравнений (5.2)-(5.3) с постоянными коэффициентами, при фиксированных начальных условиях, с учетом выполнимости для полей $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t), \tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$ условий поперечности (5.4) при всех $t\geq t_0$.

С целью устранения неудобства, связанного с учетом условий поперечности, введем поле

$$\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t)+i\frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}=\tilde{\bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t)\,, \tag{2.6.3}$$

которое является поперечным по построению, так как

$$(\mathbf{k},\bar{\mathbf{F}})=(\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{E}}})+\frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\bar{\rho}}=0\,. \tag{2.6.4}$$

Так как из (5.2) следует, что

$$\dot{\tilde{\bar{\mathbf{E}}}}+\gamma\tilde{\bar{\mathbf{E}}}+\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}=i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{H}}}]\,,$$

и, следовательно,

$$\dot{\tilde{\bar{\mathbf{F}}}}=\dot{\tilde{\bar{\mathbf{E}}}}+\frac{4\pi i}{\varepsilon}\cdot\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\,\dot{\tilde{\bar{\rho}}}=-\gamma\Big(\tilde{\bar{\mathbf{E}}}+i\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\frac{4\pi}{\varepsilon}\,\tilde{\bar{\rho}}\Big)+i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{H}}}]-\frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp\,,$$

где введено поле $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k},t)$, которое представляет фурье-образ плотности *поперечного флуктуационного тока*,

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp=\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}(\mathbf{k},\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}). \tag{2.6.5}$$

Тогда система уравнений для пары полей $\tilde{\bar{\mathbf{F}}}$ и $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\bar{\mathbf{F}}}}+\gamma\tilde{\bar{\mathbf{F}}}&=\quad i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{H}}}]-\frac{4\pi}{\varepsilon}\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp\,,\\ \dot{\tilde{\bar{\mathbf{H}}}}&=-i\frac{c}{\mu}[\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{F}}}]\,.\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Она допускает решение в пространстве упорядоченных пар поперечных полей $\langle\tilde{\bar{\mathbf{F}}},\tilde{\bar{\mathbf{H}}}\rangle$, для которых имеют место $(\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t))=0$, $(\mathbf{k},\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t))=0$.

Запишем систему (6) в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\bar{\mathbf{F}}}} \\ \dot{\tilde{\bar{\mathbf{H}}}} \end{pmatrix} = \mathsf{G} \begin{pmatrix} \tilde{\bar{\mathbf{F}}} \\ \tilde{\bar{\mathbf{H}}} \end{pmatrix} - \frac{4\pi}{\varepsilon} \begin{pmatrix} \tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6.7}$$

где 6×6-матрица G имеет следующий блочный вид

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} -\gamma \mathbf{1} & i\dfrac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k}, \cdot\,] \\ \\ -i\dfrac{c}{\mu}[\,\mathbf{k}, \cdot\,] & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.8}$$

и $\mathbf{1}$ обозначает единичную $3{\times}3$-матрицу δ_{ij}, а $[\mathbf{k}, \cdot]$ обозначает матрицу $\epsilon_{ilj}k_l$ с символом Леви-Чивита ϵ_{ilj}; $i, j = 1, 2, 3$ и по l производится суммирование $l = 1, 2, 3$.

Введя матрицу $\mathsf{S}(t)$ эволюции системы (7)

$$\mathsf{S}(t) = \exp\Big(\mathsf{G}t\Big),$$

которая имеет следующую $3{\times}3$-блочную структуру:

$$\mathsf{S}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{S}^{(E)}(t) & \mathsf{S}^{(EH)}(t) \\ \\ \mathsf{S}^{(HE)}(t) & \mathsf{S}^{(H)}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.6.9}$$

запишем решение системы (7) в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\mathbf{F}}}(t) \\ \tilde{\bar{\mathbf{H}}}(t) \end{pmatrix} = \mathsf{S}(t) \begin{pmatrix} \tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0 \\ \tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0 \end{pmatrix} - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mathsf{S}(t-s) \begin{pmatrix} \tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k}, s) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} ds\,. \tag{2.6.10}$$

Здесь $\mathbf{0}$ обозначает нулевой трехмерный вектор.

Из формулы (10) видно, что обобщенные случайные процессы $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t)$ и $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t)$ выражаются линейным образом через процесс $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k}, t)$, который, в свою очередь, линейно связан с гауссовским процессом $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k}, t)$ (см. (5)). Следовательно, эти процессы являются гауссовскими, если их случайные начальные значения $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t_0)$, $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t_0)$ являются гауссовскими случайными величинами. Кроме того, так как $\langle\!\langle \tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k}, t) \rangle\!\rangle = 0$ и $\langle\!\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t) \rangle\!\rangle = 0$, а случайные величины $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t_0)$, $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t_0)$, по предположению, имеют нулевые средние значения, то случайные процессы $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k}, t)$ и $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k}, t)$ также имеют нулевые средние значения.

Матрицу $\mathsf{S}(t)$ мы вычислим косвенным образом. Сначала получим из системы (6) эволюционное однородное уравнение для поля $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t)$, затем найдем его общее решение и вычислим функцию $\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$ и, наконец, на основании этих двух функций, определяющих общее решение однородной системы уравнений, которая получается из (7) обращением в нуль $\tilde{\tilde{\boldsymbol{j}}}_\perp$, найдем выражение для матрицы $\mathsf{S}(t)$.

Продифференцируем первое уравнение системы (7) по t. Воспользовавшись вторым уравнением (7) и условием поперечности поля $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}$, получим уравнение второго порядка для $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t)$,

$$\ddot{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}} + \gamma\dot{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}} + \bar{c}^2\mathbf{k}^2\tilde{\tilde{\mathbf{F}}} = 0\,, \quad \bar{c}^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,. \tag{2.6.11}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t) = \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_+ \exp\big(\omega_+(t-t_0)\big) + \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_- \exp\big(\omega_-(t-t_0)\big)\,, \tag{2.6.12}$$

в котором

$$\omega \equiv \omega(\mathbf{k}) = \Big(\Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^2 - \bar{c}^2\mathbf{k}^2\Big)^{1/2}, \qquad \omega_\pm \equiv \omega_\pm(\mathbf{k}) = -\frac{\gamma}{2} \pm \omega\,.$$

В формуле (11) $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_+$, $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_-$ – произвольные векторы. Из условия $\big(\mathbf{k},\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(t)\big) = 0$ при всех $t \geq 0$ следует, что эти векторы поперечные $\big(\mathbf{k},\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_\pm\big) = 0$.

Подставляя общее решение (11) в

$$i\frac{\varepsilon}{c\mathbf{k}^2}[\,\mathbf{k},\dot{\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}} + \gamma\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}] = \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}\,,$$

получим

$$\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t) = i\frac{\varepsilon}{c\mathbf{k}^2}\Big(\omega_-[\,\mathbf{k},\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_+]e^{\omega_+(t-t_0)} + \omega_+[\,\mathbf{k},\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_-]e^{\omega_-(t-t_0)}\Big)\,, \tag{2.6.13}$$

где мы воспользовались тождествами $\omega_\pm + \gamma = \omega_\mp$.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы выразить векторы $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_+$, $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_-$ через начальные данные $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t_0) \equiv \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_0$, $\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t_0) \equiv \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_0$. Полагая в (12) и (13) $t = t_0$, получим систему уравнений для векторов $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_+$, $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_-$,

$$\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_0 = \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_+ + \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_-\,, \qquad -i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_0 = \omega_-[\,\mathbf{k},\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_+] + \omega_+[\,\mathbf{k},\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_-]\,.$$

Так как $[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0] = [\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_+] + [\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_-]$, то из этой системы находим

$$[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_\pm] = \pm\frac{1}{2\omega}\Big[\omega_\pm[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0] + i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0\Big]\,, \tag{2.6.14}$$

где мы воспользовались тождеством $\omega_+ - \omega_- = 2\omega$. Умножим векторно на $\mathbf{k}$ полученные выражения и воспользуемся поперечностью векторов $\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_+$, $\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_-$. В результате, получим

$$\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_\pm = \pm\frac{1}{2\omega}\Big[\omega_\pm\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0]\Big]\,. \tag{2.6.15}$$

Подстановка выражений (14) и (15) в (12) и (13) дает нам окончательные выражения для полей $\bar{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t)$ и $\bar{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$ в зависимости их от начальных данных,

$$\bar{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{2\omega}\Big((\omega_+\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0])\exp\big(\omega_+ t\big) - (\omega_-\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0])\exp\big(\omega_- t\big)\Big), \tag{2.6.16}$$

$$\begin{aligned}\bar{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t) = -\frac{i\varepsilon}{2\omega c\mathbf{k}^2}\Big(\omega_-\big(\omega_+[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0] + i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0\big)\exp\big(\omega_+(t-t_0)\big) -\\ -\omega_+\big(r_-[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0] + i\frac{c\mathbf{k}^2}{\varepsilon}\bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0\big)\exp\big(r_-(t-t_0)\big)\Big)\,.\end{aligned} \tag{2.6.17}$$

Полученные выражения представим в пространстве пар векторов $\langle\bar{\tilde{\mathbf{F}}}, \bar{\tilde{\mathbf{H}}}\rangle$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\bar{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t)\\ \\ \bar{\tilde{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)\end{pmatrix} = \frac{1}{2\omega}\left[\exp\big(\omega_+(t-t_0)\big)\begin{pmatrix}\omega_+\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0]\\ \\ \omega_-\bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0 - i\frac{c}{\mu}[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0]\end{pmatrix} - \right.\\ \left. -\exp\big(\omega_-(t-t_0)\big)\begin{pmatrix}\omega_-\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0 - i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0]\\ \\ \omega_+\bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0 - i\frac{c}{\mu}[\mathbf{k}, \bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0]\end{pmatrix}\right]\,,\end{aligned}$$

где мы воспользовались тождеством $\omega_+\omega_- = \bar{c}^2\mathbf{k}^2$.

Отсюда следует, что матрица эволюции $\mathsf{S}(t) = \exp(\mathsf{G}t)$ определяется ее действием на вектор $\langle\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0, \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0\rangle$:

$$\exp\big(\mathsf{G}(t-t_0)\big)\begin{pmatrix}\bar{\tilde{\mathbf{F}}}_0\\ \\ \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_0\end{pmatrix} = \frac{1}{2\omega}\left[\exp\big(\omega_+(t-t_0)\big)\begin{pmatrix}\omega_+\mathbf{1} & -i\frac{c}{\varepsilon}[\mathbf{k},\cdot]\\ \\ -i\frac{c}{\mu}[\mathbf{k},\cdot] & \omega_-\mathbf{1}\end{pmatrix} + \right.$$

$$
+\exp\big(\omega_{\_}(t-t_0)\big)\begin{pmatrix} -\omega_{\_}\mathbf{1} & i\dfrac{c}{\varepsilon}[\,\mathbf{k},\cdot] \\ \\ i\dfrac{c}{\mu}[\,\mathbf{k},\cdot] & -\omega_{+}\mathbf{1} \end{pmatrix}\Bigg]\begin{pmatrix}\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\\ \\ \tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\end{pmatrix}. \qquad (2.6.18)
$$

Выпишем теперь 3×3-блоки эволюционной матрицы $\mathsf{S}(t)=\exp(\mathsf{G}t)$:

$$
\mathsf{S}^{(E)}(t)=\frac{1}{2\omega}\Big(\omega_{+}\exp\big(\omega_{+}t\big)-\omega_{\_}\exp\big(\omega_{\_}t\big)\Big)\,\mathbf{1}\,, \qquad (2.6.19)
$$

$$
\mathsf{S}^{(H)}(t)=\frac{1}{2\omega}\Big(\omega_{\_}\exp\big(\omega_{+}t\big)-\omega_{+}\exp\big(\omega_{\_}t\big)\Big)\,\mathbf{1}\,, \qquad (2.6.20)
$$

$$
\mathsf{S}^{(EH)}(t)=-\frac{ic}{2\omega\varepsilon}\Big(\exp\big(\omega_{+}t\big)-\exp\big(\omega_{\_}t\big)\Big)\,[\mathbf{k},\cdot\,]\,, \qquad (2.6.21)
$$

$$
\mathsf{S}^{(HE)}(t)=\frac{\varepsilon}{\mu}\mathsf{S}^{(EH)}(t)\,. \qquad (2.6.22)
$$

Полученные явные формулы (19)-(22) для эволюционной матрицы $\mathsf{S}(t)$ завершают построение случайного процесса $\langle\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t),\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)\rangle$.

2.7. Построение стационарного случайного процесса

В этом разделе мы построим стационарный процесс, аппроксимирующий с вероятностью 1 траектории случайного процесса $\langle\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t),\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)\rangle$ при $t\gg \mathrm{c}_{V}\bar{L}^2/\varkappa\sim 10^{-3}\div 10^{-1}$сек. Этот стационарный процесс мы, в дальнейшем, используем для описания в $\mathbf{k}$-пространстве стохастического электромагнитного поля в диэлектрической (и полупроводящей) среде.

Построение аппроксимирующего процесса мы осуществим посредством вычисления корреляционных функций процессов $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$ и $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t)$, траектории которых найдены в предыдущем разделе. Набор всех возможных для этого набора случайных процессов корреляционных функций $\big\langle\!\big\langle\tilde{\bar{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{E}}'_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\big\rangle\!\big\rangle$, $\big\langle\!\big\langle\tilde{\bar{H}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}'_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\big\rangle\!\big\rangle$, $\big\langle\!\big\langle\tilde{\bar{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}'_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\big\rangle\!\big\rangle$, $j_1,j_2=1,2,3$ полностью характеризуют пару случайных гауссовских процессов $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$. Однако, при этом, по технических причинам, нам понадобится также выражение для корреляционной функции вида $\big\langle\!\big\langle\tilde{\bar{E}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\rho}}'(\mathbf{k}_2,t_2)\big\rangle\!\big\rangle$. В этих формулах штрих, стоящий у буквы может быть либо опущен, либо заменен на знак $*$ комплексного сопряжения, так случайные процессы комплекснозначны.

2.7.1. Вычисление корреляционной функции $\big\langle\!\big\langle\,\tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{F}}^{*}_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\,\big\rangle\!\big\rangle$. Имея явные выражения для траекторий процесса, подсчитаем указанные корреляционные функции электромагнитного поля.

Используя определение флуктуационного тока, имеет место $\langle\!\langle \tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k}, s)\rangle\!\rangle = 0$. Поэтому парные корреляционные функции поперечного тока $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k}, t)$ определяются корреляционными функциями случайного процесса $\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}, t)$, которые даются формулой (5.13). Определим, прежде всего, корреляционную функцию $\langle\!\langle \tilde{\bar{j}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{j}}_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle$, которая, ввиду (5.14) и (5.13), равна

$$\langle\!\langle \tilde{\bar{j}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{j}}_{l_2}{}^*(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6}\int\limits_{(\mathbb{R}^3)^2} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1', t_1)\bar{a}^*(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2', t_2)\langle\!\langle \tilde{\bar{\varphi}}_{l_1}(\mathbf{k}_1', t_1)\tilde{\bar{\varphi}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2', t_2)\rangle\!\rangle d\mathbf{k}_1' d\mathbf{k}_2' =$$

$$= \delta(t_1 - t_2)\frac{\delta_{l_1,l_2}}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}', t_1)\bar{a}^*(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}', t_2)\bar{K}(2|\mathbf{k}'|)d\mathbf{k}' \equiv$$

$$\equiv \delta(t_1 - t_2)\delta_{l_1,l_2}\bar{K}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,. \tag{2.7.1}$$

Вычислим корреляционную функцию поперечного тока в терминах введенной функции $\bar{K}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$,

$$\delta(s_1 - s_2)K^\perp_{l_1,l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv \langle\!\langle (\tilde{\bar{j}}_\perp)_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)(\tilde{\bar{j}}_\perp)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle\!\rangle\,, \tag{2.7.2}$$

где, согласно определению (6.5), имеем

$$K^\perp_{l_1l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \left[\mathbf{k}_1^2\mathbf{k}_2^2\right]^{-1}\langle\!\langle \left[\,\mathbf{k}_1, [\,\mathbf{k}_1, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}_1)]\right]_{l_1}\left[\,\mathbf{k}_2, [\,\mathbf{k}_2, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}^*(\mathbf{k}_2)]\right]_{l_2}\rangle\!\rangle\,.$$

Выполняя вычисления согласно правилам тензорной алгебры, получим выражение

$$K^\perp_{l_1l_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \Big(\delta_{l_1m} - \frac{(\mathbf{k}_1)_{l_1}(\mathbf{k}_1)_m}{\mathbf{k}_1^2}\Big)\Big(\delta_{l_2m} - \frac{(\mathbf{k}_2)_{l_2}(\mathbf{k}_2)_m}{\mathbf{k}_2^2}\Big)\bar{K}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,. \tag{2.7.3}$$

Приступим теперь к вычислению корреляционных функций $\langle\!\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\tilde{\bar{F}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle\!\rangle$. Начнем с первой корреляционной функции этого списка. Согласно формулам, определяющим решение стохастических уравнений движения (6.18),

$$\langle\!\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{F}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) -$$

$$-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_1}\big(\mathsf{S}^{(E)}(\mathbf{k}_1, t_1 - s_1)\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k}_1, s_1)\big)_{l_1}ds_1\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) -$$

$$
-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_2}\big(\mathsf{S}^{(E)}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k}_2,s_2)\big)^*_{l_2}ds_2\Big]\Big\rangle\!\Big\rangle\,.
$$

Принимая во внимание равенство нулю среднего значения тока,

$$
\Big\langle\!\Big\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{F}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\Big\rangle\!\Big\rangle=
$$

$$
=\Big\langle\!\Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times
$$

$$
\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\big)^*_{l_2m_2}\big(\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\big)^*_{l_2m_2}\big(\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle\!\Big\rangle+
$$

$$
+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s_1)\int_0^{t_2}\mathsf{S}^{(E)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\times
$$

$$
\times\Big\langle\!\Big\langle\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1,s_1)\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2,s_2)\Big\rangle\!\Big\rangle ds_1ds_2\,.
$$

Далее, не ограничивая общности, ввиду симметрии выражений относительно перестановок значений индексов 1 и 2, будем полагать, что $t_2>t_1$. Используя (1), преобразуем полученное выражение,

$$
\Big\langle\!\Big\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{F}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\Big\rangle\!\Big\rangle=
$$

$$
=\Big\langle\!\Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times
$$

$$
\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\big)_{l_2m_2}\big(\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{m_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\big)_{l_2m_2}\big(\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{m_2}(\mathbf{k}_2)\Big]^*\Big\rangle\!\Big\rangle+
$$

$$
+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2K^\perp_{m_1,m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(E)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds \qquad (2.7.4)
$$

Подставляя явные выражения (6.19), (6.21) для операторов $\mathsf{S}^{(E)}(t)$, $\mathsf{S}^{(EH)}(t)$, вычислим последний интеграл в последней формуле,

$$
\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(E)*}_{l_2m}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds=\frac{\delta_{l_1l_2}}{4\omega(\mathbf{k}_1)\omega^*(\mathbf{k}_2)}\times
$$

$$
\times\Big[\omega_+(\mathbf{k}_1)\omega^*_+(\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_+(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds+
$$

$$
+\ \omega_-(\mathbf{k}_1)\omega^*_-(\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_-(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\ -
$$

$$
-\,\omega_+(\mathbf{k}_1)\omega^*_-(\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_+(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\ -
$$

$$- \ \omega_{-}(\mathbf{k}_1)\omega_{+}^{*}(\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_{+}^{*}(\mathbf{k}_2)(t_2-s)+\omega_{-}(\mathbf{k}_1)(t_1-s)\big)ds\Big]\,. \tag{2.7.5}$$

Интегралы, входящие в это выражение вычисляются явно,

$$\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_\alpha(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega_\beta^{*}(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds=$$

$$=\exp\big(\omega_\beta^{*}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)\big)\int_0^{t_1}\exp\big[\big(\omega_\alpha(\mathbf{k}_1)+\omega_\beta^{*}(\mathbf{k}_2)\big)\big(t_1-s\big)\big]ds=$$

$$=-\frac{e^{\omega_\beta^{*}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega_{\alpha}(\mathbf{k}_1)+\omega_{\beta}^{*}(\mathbf{k}_2)}\Big(1-e^{\big(\omega_\alpha(\mathbf{k}_1)+\omega_\beta^{*}(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)\,, \tag{2.7.6}$$

где $\alpha,\beta\in\{\pm\}$.

Заметим, что $\mathrm{Re}\,\omega_\pm(\mathbf{k}_i)<0$, $i=1,2$. Это становится очевидным после подстановки явных выражений для $\omega_\pm(\mathbf{k}_i)$, $i=1,2$,

$$\omega_\pm(\mathbf{k}_i)=-\frac{\gamma}{2}\ \pm\ \Big[\Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^2-\bar{c}^2\mathbf{k}_i^2\Big]^{1/2}.$$

В связи с этим, существуют предельные значения для вычисленных интегралов при $t_1\to\infty$, $t_2-t_1=\mathrm{const}$, равные

$$\lim_{\substack{t_1\to\infty,\\ t_2-t_1=\mathrm{const}}}\ \int_0^{t_1}\exp\big(\omega_\alpha(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega_\beta^{*}(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds=-\frac{e^{\omega_\beta^{*}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega_{\alpha}(\mathbf{k}_1)+\omega_{\beta}^{*}(\mathbf{k}_2)}\,. \tag{2.7.7}$$

Подставим результаты вычислений в формулу для корреляционной функции (4)

$$\Big\langle\!\!\Big\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{F}}^{*}_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\Big\rangle\!\!\Big\rangle=$$

$$=\Big\langle\!\!\Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\big)_{l_1m_1}\big(\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\big)_{l_2m_2}\big(\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{m_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\big)_{l_2m_2}\big(\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{m_2}(\mathbf{k}_2)\Big]^{*}\Big\rangle\!\!\Big\rangle-$$

$$-\ \Big(\frac{4\pi}{\varepsilon}\Big)^2\frac{K^{\perp}_{l_1l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{4\omega(\mathbf{k}_1)\omega^{*}(\mathbf{k}_2)}\ \Bigg[\frac{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)\omega_{+}^{*}(\mathbf{k}_2)}{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega_{+}^{*}(\mathbf{k}_2)}e^{\omega_{+}^{*}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\Big(1-e^{\big(\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega_{+}^{*}(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)+$$

$$+\frac{\omega_{-}^{*}(\mathbf{k}_2)\omega_{-}(\mathbf{k}_1)}{\omega_{-}^{*}(\mathbf{k}_2)+\omega_{-}(\mathbf{k}_1)}e^{\omega_{-}^{*}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\Big(1-e^{\big(\omega_{-}(\mathbf{k}_1)+\omega_{-}^{*}(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)-$$

$$
-\frac{\omega_{-}(\mathbf{k}_1)\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)}{\omega_{-}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)}e^{\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\Big(1-e^{\big(\omega_{-}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)-
$$

$$
-\frac{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)}{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)}e^{\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\Big(1-e^{\big(\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)\Bigg]. \qquad (2.7.8)
$$

Полученная формула дает выражение для корреляционной функции $\langle\!\langle \tilde{\bar{\bar{F}}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\bar{F}}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2.

Особый интерес представляет вид функции (8) в пределе при $t_1 \to \infty$, $t_2 - t_1 = \mathrm{const}$, $t_2 > t_1$. Поэтому перейдем в полученном выражении (8) к указанному пределу, то есть получим корреляционную функцию $\langle\!\langle \tilde{\bar{\bar{F}}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\bar{F}}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle_\infty$, которую мы пометим нижним индексом ∞. Так как $\omega_\pm(\mathbf{k}_i) < 0$, $i = 1,2$, то из формул (5.19), (5.21) следует, что $\big(\mathsf{S}^{(E)}(\mathbf{k}_1,t_1)\big)_{lm} \to 0$, $\big(\mathsf{S}^{(EH)}(\mathbf{k}_1,t_1)\big)_{lm} \to 0$ при $t_1 \to \infty$. Тогда из (8) получаем предельную корреляционную функцию, ,

$$
\langle\!\langle \tilde{\bar{\bar{F}}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\bar{F}}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle_\infty =
$$

$$
= \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2 \frac{K^{\perp}_{l_1l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{4\omega(\mathbf{k}_1)\omega^*(\mathbf{k}_2)}\left[\left(\frac{\omega_{-}(\mathbf{k}_1)\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)}{\omega_{-}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)}-\frac{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)}{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)}\right)e^{\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)}{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)}-\frac{\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)\omega_{-}(\mathbf{k}_1)}{\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)+\omega_{-}(\mathbf{k}_1)}\right)e^{\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\right],
$$

либо, после сложения коэффициентов с применением тождеств

$$
\Big(\omega_{-}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)\Big)\Big(\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)\Big) = \gamma^2 - 2\gamma\omega^*(\mathbf{k}_2) + \bar{c}^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)\,,
$$

$$
\Big(\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)\Big)\Big(\omega_{-}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)\Big) = \gamma^2 + 2\gamma\omega(\mathbf{k}_1) + \bar{c}^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)\,,
$$

$$
\langle\!\langle \tilde{\bar{\bar{F}}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\bar{F}}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle_\infty =
$$

$$
= 2\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^2\frac{K^{\perp}_{l_1l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{\omega^*(\mathbf{k}_2)}\left[\frac{\omega^{2\,*}_{-}(\mathbf{k}_2)e^{\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2+2\gamma\omega^*(\mathbf{k}_2)+\bar{c}^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\omega^{2\,*}_{+}(\mathbf{k}_2)e^{\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2-2\gamma\omega^*(\mathbf{k}_2)+\bar{c}^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)}\right]. \qquad (2.7.9)
$$

Эта корреляционная функция соответствует конструируемому стационарному процессу стохастического электромагнитного поля.

2.7.2. Вычисление корреляционной функции $\langle\!\langle\, \tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\,\rangle\!\rangle$. Так как случайные траектории $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$ определяются формулой

$$\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)=\mathsf{S}^{(HE)}(\mathbf{k},t)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0(\mathbf{k})+\mathsf{S}^{(H)}(\mathbf{k},t)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0(\mathbf{k})-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathsf{S}^{(HE)}(\mathbf{k},t-s)\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k},s)ds\,, \tag{2.7.10}$$

то корреляционная функция $\langle\!\langle\tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,s_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle\!\rangle$, учитывая определение парных корреляционных функций (2) поперечного тока $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k},t)$, дается следующим выражением:

$$\langle\!\langle\, \tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle=$$

$$\left\langle\!\!\left\langle\, \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0+\mathsf{S}^{(H)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_1}\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1-s_1)\,\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(s_1)\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)ds_1\Big]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0+\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)-\frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_2}\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2-s_2)\,\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(s_2)\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)ds_2\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Принимая во внимание равенство нулю среднего значения тока,

$$\langle\!\langle\tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle=$$

$$=\left\langle\!\!\left\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle+$$

$$+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\int\limits_0^{t_1}\mathsf{S}^{(HE)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s_1)\times$$

$$\times\int\limits_0^{t_2}\mathsf{S}^{(HE)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\langle\!\langle\,\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1,s_1)\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2,s_2)\rangle\!\rangle ds_1ds_2\,.$$

Далее, не ограничивая общности, ввиду симметрии выражений относительно перестановок значений индексов 1 и 2, будем полагать, что $t_2>t_1$. Используя (10), преобразуем это выражение к виду

$$\langle\!\langle \tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle =$$

$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big] \times$$

$$\times \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big] \Big\rangle\!\!\Big\rangle +$$

$$+ \left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2 K^{\perp}_{m_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1} \mathsf{S}^{(HE)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(HE)\,*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds\,. \quad (2.7.11)$$

Запишем явное выражение для эволюционной матрицы $\mathsf{S}^{(HE)}_{lm}(\mathbf{k},t)$ (см. (6.21), (6.22)):

$$\mathsf{S}^{(HE)}_{lm}(\mathbf{k},t) = i\frac{c}{2\omega(\mathbf{k})\mu}\Big(\exp\big(\omega_+(\mathbf{k})t\big) - \exp\big(\omega_-(\mathbf{k})t\big)\Big)\epsilon_{lmn}k_n\,.$$

Подставляя явные выражения для операторов $\mathsf{S}^{(HE)}(t)$, $\mathsf{S}^{(H)}(t)$, вычислим интеграл в последней формуле:

$$\int_0^{t_1} \mathsf{S}^{(HE)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(HE)\,*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds = \frac{c^2}{4\mu^2}\cdot\frac{\epsilon_{l_1m_1n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1}\epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}}{\omega(\mathbf{k}_1)\omega^*(\mathbf{k}_2)}\times$$

$$\times\Big[\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_+(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\;+$$

$$+\;\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_-(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\;-$$

$$-\;\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_-(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\;-$$

$$-\;\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_+(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\Big]\,. \quad (2.7.12)$$

Наконец, используя явные выражения для интегралов, запишем формулу (11) для корреляционной функции в виде

$$\langle\!\langle \tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle =$$

$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big] \times$$

$$\times \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\bar{\mathbf{F}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\bar{\mathbf{H}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big] \Big\rangle\!\!\Big\rangle -$$

$$
- \left(\frac{2\pi c}{\varepsilon\mu}\right)^2 \frac{K^{\perp}_{m_1 m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{\omega(\mathbf{k}_1)\omega^*(\mathbf{k}_2)}\, \epsilon_{l_1 m_1 n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1} \epsilon_{l_2 m_2 n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2} \times
$$

$$
\times \left[\frac{e^{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega_+(\mathbf{k}_1)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{\left(\omega_+(\mathbf{k}_1)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right) + \right.
$$

$$
+ \frac{e^{\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega^*_-(\mathbf{k}_2)+\omega_-(\mathbf{k}_1)} \left(1 - e^{\left(\omega_-(\mathbf{k}_1)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right) -
$$

$$
- \frac{e^{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega_-(\mathbf{k}_1)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{\left(\omega_-(\mathbf{k}_1)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right) -
$$

$$
\left. - \frac{e^{\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega_+(\mathbf{k}_1)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)} \left(1 - e^{\left(\omega_+(\mathbf{k}_1)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)\right)t_1}\right) \right] . \qquad (2.7.13)
$$

Эта формула дает выражение для корреляционной функции $\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2.

Как и ранее, для нас особое значение представляет выражение для этой корреляционной функции в пределе при $t_1 \to \infty$, $t_2 - t_1 = \mathrm{const}$, $t_2 > t_1$, когда происходит переход стационарному гауссовскому случайному процессу, описывающему флуктуационное электромагнитное поле. Перейдем в формуле (13) к указанному пределу, то есть получим корреляционную функцию $\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle_\infty$ для стационарного стохастического электромагнитного поля. Так как $\omega_\pm(\mathbf{k}_i) < 0$, $i = 1, 2$, то $\left(\mathsf{S}^{(HE)}(\mathbf{k}_1,t_1)\right)_{lm} \to 0$, $\left(\mathsf{S}^{(H)}(\mathbf{k}_1,t_1)\right)_{lm} \to 0$ при $t_1 \to \infty$. Тогда из (13) получаем предельную корреляционную функцию, помеченную нижним индексом ∞,

$$
\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{H}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle_\infty = 2\left(\frac{2\pi c}{\varepsilon\mu}\right)^2 \frac{K^{\perp}_{m_1 m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{\omega^*(\mathbf{k}_2)}\, \epsilon_{l_1 m_1 n_1}(\mathbf{k}_1)_{n_1} \epsilon_{l_2 m_2 n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}
$$

$$
\times \left[\frac{e^{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2 - 2\gamma\omega^*(\mathbf{k}_2) + \bar{c}^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} - \frac{e^{\omega^*_-(\mathbf{k}_1)(t_2-t_1)}}{\gamma^2 + 2\gamma\omega^*(\mathbf{k}_2) + \bar{c}^2(\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2)} \right] . \qquad (2.7.14)
$$

Заметим, что в формулах (9) и (14) недопустима перестановка одновременная перестановка в правой части аргументов с индексами 2 на аргументы с индексами 1 с применением комплексного сопряжения, так как эти формулы получены в предположении $t_2 > t_1$.

2.7.3. Вычисление корреляционной функции $\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\right\rangle\!\right\rangle$. Как и в предыдущих пунктах, используя формулы для траекторий поля $\tilde{\bar{F}}_l(\mathbf{k}, t)$,

$$\tilde{\bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{k}, t) = \mathsf{S}^{(E)}(\mathbf{k}, t)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0(\mathbf{k}) + \mathsf{S}^{(EH)}(\mathbf{k}, t)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0(\mathbf{k}) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mathsf{S}(\mathbf{k}, t-s)\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(\mathbf{k}, s)ds$$

и формулы (10) для поля $\tilde{\bar{H}}_l(\mathbf{k}, t)$, запишем выражение для корреляционной функции $\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\right\rangle\!\right\rangle$,

$$\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\right\rangle\!\right\rangle =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0 + \mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_1}\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1 - s_1)\,\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(s_1)\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)ds_1\Big]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0 + \mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_0^{t_2}\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2 - s_2)\,\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp(s_2)\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)ds_2\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Выполняя точно такие же преобразования, как в предыдущих пунктах, имеем

$$\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\right\rangle\!\right\rangle =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle +$$

$$+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2\int\limits_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1, t_1 - s_1)\times$$

$$\times\int\limits_0^{t_2}\mathsf{S}^{(HE)*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2)\left\langle\!\left\langle \big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)_{m_1}(\mathbf{k}_1, s_1)\big(\tilde{\bar{j}}_\perp\big)^*_{m_2}(\mathbf{k}_2, s_2)\right\rangle\!\right\rangle ds_1 ds_2\,.$$

При $t_2 > t_1$, после подстановки явного выражения для корреляционной функции плотности поперечного тока, имеем

$$\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\right\rangle\!\right\rangle =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle +$$

$$+\left(\frac{4\pi}{\varepsilon}\right)^2 K^{\perp}_{m_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(HE)\,*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds\,, \quad (2.7.15)$$

Подставляя явные выражения для матричных элементов эволюционных операторов, преобразуем интеграл в этой формуле:

$$\int_0^{t_1}\mathsf{S}^{(E)}_{l_1m_1}(\mathbf{k}_1,t_1-s)\mathsf{S}^{(HE)\,*}_{l_2m_2}(\mathbf{k}_2,t_2-s)ds=\frac{-ic}{4\mu\omega(\mathbf{k}_1)\omega^*(\mathbf{k}_2)}\cdot\delta_{l_1m_1}\epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}\times$$

$$\times\Big[\omega_{_+}(\mathbf{k}_1)\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_{_+}(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_{_+}(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds+$$

$$+\ \omega_{_-}(\mathbf{k}_1)\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_{_-}(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_{_-}(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds-$$

$$-\,\omega_{_-}(\mathbf{k}_1)\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_{_-}(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_{_+}(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds-$$

$$-\ \omega_{_+}(\mathbf{k}_1)\int_0^{t_1}\exp\big(\omega_{_+}(\mathbf{k}_1)(t_1-s)+\omega^*_{_-}(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)ds\Big]\,.$$

На основе явных выражений для интегралов, находим формулу для искомой корреляционной функции в виде:

$$\langle\!\langle \tilde{\bar{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\rangle\!\rangle=$$

$$=\Big\langle\!\!\Big\langle\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)_{l_1}(\mathbf{k}_1)\Big]\times$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_{l_2}(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle\!\!\Big\rangle+$$

$$+\ \frac{i(2\pi)^2c}{\varepsilon^2\mu\omega(\mathbf{k}_1)\omega^*(\mathbf{k}_2)}\cdot\epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}K^{\perp}_{l_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\times$$

$$\times\Bigg[\frac{\omega_{_+}(\,\mathbf{k}_1)e^{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega_{_+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{_+}(\mathbf{k}_2)}\Big(1-e^{\big(\omega_+(\mathbf{k}_1)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)+$$

$$+\ \frac{\omega_{_-}(\mathbf{k}_1)e^{\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega^*_{_-}(\mathbf{k}_2)+\omega_{_-}(\mathbf{k}_1)}\Big(1-e^{\big(\omega_-(\mathbf{k}_1)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)-$$

$$-\ \frac{\omega_{_-}(\mathbf{k}_1)e^{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega_{_-}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{_+}(\mathbf{k}_2)}\Big(1-e^{\big(\omega_-(\mathbf{k}_1)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)-$$

$$-\frac{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)e^{\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)}\Big(1-e^{\big(\omega_{+}(\mathbf{k}_1)+\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)\big)t_1}\Big)\Bigg]\,. \qquad (2.7.16)$$

Эта формула дает выражение для корреляционной функции $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle$ при произвольных значениях временных аргументов t_1 и t_2.

Выражение для корреляционной функции в пределе при $t_1 \to \infty$, $t_2 - t_1 = \mathrm{const}$, $t_2 > t_1$, помеченное индексом ∞, соответствующее стационарному гауссовскому случайному процессу, которое описывает флуктуационное электромагнитное поле, имеет вид:

$$\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{F}}_{l_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{H}}^*_{l_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle_\infty = -\frac{8i\pi^2 c}{\varepsilon^2\mu\omega^*(\mathbf{k}_2)}\cdot\epsilon_{l_2m_2n_2}(\mathbf{k}_2)_{n_2}K^{\perp}_{l_1m_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\times$$

$$\times\left[\frac{\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)e^{\omega^*_{+}(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma^2-2\gamma\omega^*(\mathbf{k}_2)+\bar{c}^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)}-\frac{\omega^*_{-}(\mathbf{k}_2)e^{\omega^*_{-}(\mathbf{k}_1)(t_2-t_1)}}{\gamma^2+2\gamma\omega^*(\mathbf{k}_2)+\bar{c}^2(\mathbf{k}_1^2-\mathbf{k}_2^2)}\right]. \quad (2.7.17)$$

2.7.4. Вычисление корреляционной функции $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t_1)\tilde{\tilde{\rho}}^*(\mathbf{k}',t_2)\right\rangle\!\right\rangle$. Для завершения вычисления основных статистических характеристик модели стохастического электромагнитного поля в твердотельных диэлектриках, вызванного тепловыми колебаними атомов около положения равновесия, нам нужно вычислить корреляционные функции связанные с наличием продольной составляющей электрического поля (см. (5.4) и (6.4))

$$\big(\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t),\mathbf{k}\big) = -\frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)\,, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t) = \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{k},t) - \frac{4\pi i}{\varepsilon}\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2}\,. \quad (2.7.18)$$

Случайный процесс $\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)$, который описывает тепловые флуктуации заряда, определяется стохастическим дифференциальным уравнением (5.5), в котором траектории процесса $\tilde{\tilde{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k},t)$ определяются (5.14) и, соответственно, траектории процесса $\tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k},t)$, при каждом фиксированном $\mathbf{k}$, определяются формулой (6.2).

Отсюда следует, что для вычисления парных корреляционных функций $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle$, $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle$, необходимы выражения для корреляционных функций $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\rho}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle$, $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}^*_{j}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle$, $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle$. Вычислим их в указанном порядке следования. В отличие от вычислений, проделанных в предыдущих пунктах, мы получим выражения для этих корреляционных функций с учетом явного вида корреляционной функции $\bar{K}_{j_1,j_2}(\mathbf{k}_1,t_1;\mathbf{k}_2,t_2)$.

На основании выражения (6.2), имеем

$$\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$\left\langle\!\!\left\langle \left[e^{-\gamma(t_1-t_0)}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_0) - \frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')d\mathbf{k}_1'\int\limits_{t_0}^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s_1)}(\mathbf{k}_1,\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}_1',s_1))ds_1\right]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[e^{-\gamma(t_2-t_0)}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_2,t_0) - \frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_2')d\mathbf{k}_2'\int\limits_{t_0}^{t_2}e^{-\gamma(t_2-s_2)}(\mathbf{k}_2,\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}_2',s_2))ds_2\right]^*\right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= e^{-\gamma(t_1+t_2-2t_0)}\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1,t_0)\tilde{\bar{\rho}}_0^*(\mathbf{k}_2,t_0)\right\rangle\!\!\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')d\mathbf{k}_1'\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}^*(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_2')d\mathbf{k}_2'\int_0^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1\int_0^{t_2}e^{-\gamma(t_2-s_2)}\times$$

$$\times(\mathbf{k}_1)_{l_1}(\mathbf{k}_2)_{l_2}\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\varphi}}_{l_1}(\mathbf{k}_1',s_1)\tilde{\bar{\varphi}}_{l_2}^*(\mathbf{k}_2',s_2)\right\rangle\!\!\right\rangle ds_2\,,$$

где мы учли, что случайные величины $\tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k},t_0)$ и $\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}',s)$ статистически независимы при $s \geq t_0$ и имеют нулевые средние значения, $\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k},t_0)\right\rangle\!\right\rangle = 0$ и $\left\langle\!\left\langle \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}',s)\right\rangle\!\right\rangle = 0$.

Воспользуемся формулой (5.11) и вычислим интеграл по s_2. Далее, не ограничивая общности, положим, что $t_2 > t_1$. Тогда получаем искомое выражение для корреляционной функции

$$\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\!\right\rangle = e^{-\gamma(t_1+t_2-2t_0)}\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}_0(\mathbf{k}_1,t_0)\tilde{\bar{\rho}}_0^*(\mathbf{k}_2,t_0)\right\rangle\!\!\right\rangle +$$

$$+e^{-\gamma(t_2-t_1)}\frac{1-e^{-2\gamma t_1}}{2\gamma}\,\frac{(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{(2\pi)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\bar{K}(2\mathbf{k}')\bar{a}^*(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}')d\mathbf{k}'\,.$$

Асимптотически, при $t_1 \to \infty$, когда $t_2 - t_1 = \mathrm{const}$, эта формула упрощается

$$\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{\rho}}^*(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\!\right\rangle = \frac{e^{-\gamma(t_2-t_1)}}{2\gamma}\,\frac{(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)}{(2\pi)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\bar{K}(2|\mathbf{k}'|)\bar{a}^*(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}')d\mathbf{k}'. \tag{2.7.19}$$

Переход к пространственно однородному случаю в этой и последующих формулах осуществляется пренебрежением зависимости $a(\mathbf{x},t;T)$ от $\mathbf{x}$, то есть $\bar{a}(\mathbf{k}) \sim \delta(\mathbf{k})$.

2.7.5. Вычисление корреляционной функции $\langle\!\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}^*(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle$. Вычисление второй корреляционной функции из приведенного выше списка, согласно формулам для траекторий случайных процессов $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}, t)$, $\tilde{\bar{\mathbf{F}}}^*(\mathbf{k}, t)$, сводится к усреднению следующего выражения:

$$\langle\!\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}^*(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle =$$

$$\left\langle\!\!\left\langle \Big[e^{-\gamma(t_1-t_0)}\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_0) - \frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1')d\mathbf{k}_1' \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s_1)}(\mathbf{k}_1, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}_1', s_1))ds_1\Big]\times\right.\right.$$

$$\times\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) -$$

$$\left.\left. - \frac{4\pi}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_2} \mathsf{S}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2)\,\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2, s_2)ds_2\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_0)\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle e^{-\gamma(t_1-t_0)} +$$

$$-\frac{4\pi}{\varepsilon}e^{-\gamma(t_1-t_0)}\int_{t_0}^{t_2} \mathsf{S}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2)\,\langle\!\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_0)\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle\!\rangle ds_2 -$$

$$-\frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1')d\mathbf{k}_1' \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s_1)}\langle\!\langle(\mathbf{k}_1, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}_1', s_1)) \times$$

$$\times \Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)\Big]\rangle\!\rangle ds_1$$

$$+\frac{i}{2\pi^2\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1')d\mathbf{k}_1' \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1 \int\limits_{t_0}^{t_2} \mathsf{S}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2)\times$$

$$\times\langle\!\langle(\mathbf{k}_1, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}_1', s_1))\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle\!\rangle ds_2 =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_0)\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle e^{-\gamma(t_1-t_0)} +$$

$$+\frac{i}{2\pi^2\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1')d\mathbf{k}_1' \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1 \int\limits_{t_0}^{t_2} \mathsf{S}^{(E)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2)\times$$

$$\times\langle\!\langle(\mathbf{k}_1, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}_1', s_1))\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2, s_2)\rangle\!\rangle ds_2\,, \tag{2.7.20}$$

где мы снова воспользовались статистической независимостью случайных величин $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t_0)$ и $\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_l(\mathbf{k}',s)$, $s>t_0$ и равенством нулю их средних значений. Положив $t_2>t_1$ и подставив выражение для поперечной части плотности тока $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}_\perp=\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}-\mathbf{k}(\mathbf{k},\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}})/\mathbf{k}^2$ (см. (6.5)) и выражение для матрицы $\mathsf{S}^{(E)}(t)$ (см. (6.19)), для l-й компоненты второго слагаемого в (20) имеем

$$\frac{i(\mathbf{k}_1)_j}{2\pi^2\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')d\mathbf{k}_1'\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}^*(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_2')d\mathbf{k}_2'\int\limits_{t_0}^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1\int\limits_{t_0}^{t_2}\mathsf{S}_{lm}^{(E)*}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\times$$

$$\times\left\langle\!\!\left\langle\tilde{\bar{\varphi}}_j(\mathbf{k}_1',s_1)\left[\tilde{\bar{\varphi}}_m^*(\mathbf{k}_2',s_2)-\frac{(\mathbf{k}_2')_m}{{\mathbf{k}_2'}^2}\big(\mathbf{k}_2',\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}^*(\mathbf{k}_2',s_2)\big)\right]\right\rangle\!\!\right\rangle ds_2=$$

$$=\frac{i(\mathbf{k}_1)_m}{(2\pi)^2\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\bar{a}^*(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}')\left(\delta_{lm}-\frac{(\mathbf{k}')_l(\mathbf{k}')_m}{\mathbf{k}'^2}\right)\frac{\bar{K}(2|\mathbf{k}'|)}{\omega^*(\mathbf{k}_2)}d\mathbf{k}'\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)}\Big(\omega_+^*(\mathbf{k}_2)e^{\omega_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}-\omega_-^*(\mathbf{k}_2)e^{\omega_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}\Big)ds\,,$$

где мы воспользовались формулой (5.11). Используя явные выражения для внутренних интегралов по s,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)+\omega_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_2-s)}ds=e^{\omega_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\int\limits_{t_0}^{t_1}e^{-\gamma s+\omega_\pm^*(\mathbf{k}_2)s}ds=$$

$$=\frac{e^{-\gamma(t_1-t_0)+\omega_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_1-t_0)}-1}{\omega_\pm^*(\mathbf{k}_2)-\gamma}e^{\omega_\pm^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\,, \tag{2.7.21}$$

и учитывая первое слагаемое в (20), получаем выражение для искомой корреляционной функции

$$\left\langle\!\!\left\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{F}}_l^*(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\!\right\rangle=$$

$$=\left\langle\!\!\left\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_0)\Big[\big(\mathsf{S}^{(E)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(EH)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)\Big]\right\rangle\!\!\right\rangle e^{-\gamma(t_1-t_0)}+$$

$$+\frac{i}{(2\pi)^2\varepsilon}\Bigg(\omega_+^*(\mathbf{k}_2)\frac{e^{-\gamma(t_1-t_0)+\omega_+^*(\mathbf{k}_2)(t_1-t_0)}-1}{\omega_+^*(\mathbf{k}_2)-\gamma}e^{\omega_+^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}-$$

$$-\omega_-^*(\mathbf{k}_2)\frac{e^{-\gamma(t_1-t_0)+\omega_-^*(\mathbf{k}_2)(t_1-t_0)}-1}{\omega_-^*(\mathbf{k}_2)-\gamma}e^{\omega_-^*(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\Bigg)\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')\bar{a}^*(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}') \left((\mathbf{k}_1)_l - \frac{(\mathbf{k}')_l(\mathbf{k}', \mathbf{k}_1)}{\mathbf{k}'^2} \right) \frac{\bar{K}(2|\mathbf{k}'|)}{\omega^*(\mathbf{k}_2)} d\mathbf{k}' \,. \qquad (2.7.22)$$

Асимптотика этой корреляционной функции при $t_1 \to \infty$, $t_2 - t_1 = \mathrm{const}$ вычисляется при учете неравенства $\mathrm{Re}(\gamma - \omega^*_{\pm}(\mathbf{k}_2)) > 0$,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\gamma(t_1 - s) + \omega^*_{\pm}(\mathbf{k}_2)(t_2 - s)} ds \to \frac{e^{\omega^*_{\pm}(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)}}{\gamma - \omega^*_{\pm}(\mathbf{k}_2)} \,. \qquad (2.7.23)$$

Следовательно, асимптотическое выражение для корреляционной функции имеет вид:

$$\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{F}^*_l(\mathbf{k}_2, t_2) \right\rangle\!\!\right\rangle_\infty = \frac{i}{(2\pi)^2 \varepsilon} \left[\omega^*_+(\mathbf{k}_2) \frac{e^{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)}}{\gamma - \omega^*_+(\mathbf{k}_2)} - \omega^*_-(\mathbf{k}_2) \frac{e^{\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2 - t_1)}}{\gamma - \omega^*_-(\mathbf{k}_2)} \right] \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')\bar{a}^*(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}') \left((\mathbf{k}_1)_l - \frac{(\mathbf{k}')_l(\mathbf{k}', \mathbf{k}_1)}{\mathbf{k}'^2} \right) \frac{\bar{K}(2|\mathbf{k}'|)}{\omega^*(\mathbf{k}_2)} d\mathbf{k}' \,. \qquad (2.7.24)$$

2.7.6. Вычисление корреляционной функции $\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{\bar{\mathbf{H}}}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \right\rangle\!\!\right\rangle$. Точно также как и выше, вычисляется последняя корреляционная функция,

$$\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{\bar{\mathbf{H}}}^*(\mathbf{k}_2, t_2) \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$\left\langle\!\!\left\langle \left[e^{-\gamma(t_1 - t_0)} \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_0) - \frac{i}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) d\mathbf{k}'_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\gamma(t_1 - s_1)} (\mathbf{k}_1, \tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}'_1, s_1)) ds_1 \right] \times \right.\right.$$

$$\times \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2) \tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2) \tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) -$$

$$\left.\left. - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int\limits_{t_0}^{t_2} \mathsf{S}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \, \tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2, s_2) ds_2 \Big] \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_0) \Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2) \tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) + \big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2) \tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2) \Big] \right\rangle\!\!\right\rangle e^{-\gamma(t_1 - t_0)} +$$

$$+ \frac{i}{2\pi^2 \varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1) d\mathbf{k}'_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\gamma(t_1 - s_1)} ds_1 \int\limits_{t_0}^{t_2} \mathsf{S}^{(HE)*}(\mathbf{k}_2, t_2 - s_2) \times$$

$$\times\Big\langle\!\!\Big\langle(\mathbf{k}_1,\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}'_1,s_1))\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2,s_2)\Big\rangle\!\!\Big\rangle ds_2\,,$$

где мы, как и в предыдущем пункте, воспользовались статистической независимостью $\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_0)$ и $\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}^*_\perp(\mathbf{k}_2,s_2)$ при $s_2>t_0$, а также статистической независимостью $\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*(\mathbf{k}_2)\Big]$ и $\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}',s_1)$ при $s_1>t_0$, положив $\big\langle\!\!\big\langle\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}(\mathbf{k}',s_1))\big\rangle\!\!\big\rangle=0$, $\big\langle\!\!\big\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t_0))\big\rangle\!\!\big\rangle=0$.

Подставляя в полученную формулу выражение для поперечной части плотности тока и производя усреднения с учетом формул (6.21), (6.22), находим

$$\big\langle\!\!\big\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_l(\mathbf{k}_2,t_2)\big\rangle\!\!\big\rangle=$$
$$=\Big\langle\!\!\Big\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_0)\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle\!\!\Big\rangle e^{-\gamma(t_1-t_0)}+$$
$$\frac{i\big(\mathbf{k}_1\big)_j}{2\pi^2\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'_1)d\mathbf{k}'_1\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}^*(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}'_2)d\mathbf{k}'_2\int\limits_{t_0}^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s_1)}ds_1\int\limits_{t_0}^{t_2}\mathsf{S}^{(HE)*}_{lm}(\mathbf{k}_2,t_2-s_2)\times$$
$$\times\Big\langle\!\!\Big\langle\tilde{\bar{\varphi}}_j(\mathbf{k}'_1,s_1)\Big[\tilde{\bar{\varphi}}^*_m(\mathbf{k}'_2,s_2)-\frac{(\mathbf{k}'_2)_m}{{\mathbf{k}'_2}^2}\big(\mathbf{k}'_2,\tilde{\bar{\boldsymbol{\varphi}}}^*(\mathbf{k}'_2,s_2)\big)\Big]\Big\rangle\!\!\Big\rangle ds_2\,.\tag{2.7.25}$$

Преобразуем второе слагаемое при условии, что $t_2>t_1$

$$\frac{c}{(2\pi)^2\varepsilon\mu}\cdot\frac{\epsilon_{lmn}\big(\mathbf{k}_2\big)_n}{\omega^*(\mathbf{k}_2)}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\bar{a}^*(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}')\bar{K}(2|\mathbf{k}'|)\Big(\big(\mathbf{k}_1\big)_m-\frac{(\mathbf{k}')_m}{\mathbf{k}'^2}\big(\mathbf{k}',\mathbf{k}_1\big)\Big)d\mathbf{k}'\times$$
$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}e^{-\gamma(t_1-s)}\Big(\exp\big(\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)-\exp\big(\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-s)\big)\Big)ds\,.$$

Учитывая значения интегралов (21) и первое слагаемое в формуле (25), находим выражение для корреляционной функции при конечных значениях t_1,

$$\big\langle\!\!\big\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\bar{H}}^*_l(\mathbf{k}_2,t_2)\big\rangle\!\!\big\rangle=$$
$$=\Big\langle\!\!\Big\langle\tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1,t_0)\Big[\big(\mathsf{S}^{(HE)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{F}}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)+\big(\mathsf{S}^{(H)}(t_2)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_0\big)^*_l(\mathbf{k}_2)\Big]\Big\rangle\!\!\Big\rangle e^{-\gamma(t_1-t_0)}+$$
$$\frac{c}{(2\pi)^2\varepsilon\mu}\cdot\frac{\epsilon_{lmn}\big(\mathbf{k}_2\big)_n}{\omega^*(\mathbf{k}_2)}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\bar{a}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\bar{a}^*(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}')\bar{K}(2|\mathbf{k}'|)\Big(\big(\mathbf{k}_1\big)_m-\frac{(\mathbf{k}')_m}{\mathbf{k}'^2}\big(\mathbf{k}',\mathbf{k}_1\big)\Big)d\mathbf{k}'\times$$
$$\Big(\frac{e^{-\gamma(t_1-t_0)+\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_1-t_0)}-1}{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)-\gamma}e^{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}-\frac{e^{-\gamma(t_1-t_0)+\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_1-t_0)}-1}{\omega^*_-(\mathbf{k}_2)-\gamma}e^{\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}\Big).\tag{2.7.26}$$

Асимптотическое же выражение искомой корреляционной функции при $t_1 \to \infty$, которое отмечается знаком ∞, находится из (26) на основе формулы (23), с учетом того, что $\mathrm{Re}(\gamma - \omega^*_\pm(\mathbf{k}_2)) > 0$,

$$\langle\!\langle \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{H}}^*_l(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle_\infty = \frac{c}{(2\pi)^2\varepsilon\mu}\cdot\frac{\epsilon_{lmn}\big(\mathbf{k}_2\big)_n}{\omega^*(\mathbf{k}_2)}\left[\frac{e^{\omega^*_+(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - \omega^*_+(\mathbf{k}_2)} - \frac{e^{\omega^*_-(\mathbf{k}_2)(t_2-t_1)}}{\gamma - \omega^*_-(\mathbf{k}_2)}\right]\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^3} \bar{a}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}')\bar{a}^*(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}')\bar{K}(2|\mathbf{k}'|)\Big(\big(\mathbf{k}_1\big)_m - \frac{(\mathbf{k}')_m}{\mathbf{k}'^2}\big(\mathbf{k}', \mathbf{k}_1\big)\Big)d\mathbf{k}'\,. \qquad (2.7.27)$$

Вычисленные в этом разделе парные корреляционные функции $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{E}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{H}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle$ полностью определяют гауссовское случайное электромагнитное поле в среде рассматриваемого типа. Мы показали, что для них существуют соответствующие предельные значения $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{E}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle_\infty$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle_\infty$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{H}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle_\infty$ при $t_1 \to \infty$ и $t_2 - t_1 = \mathrm{const}$. Эти предельные значения являются корреляционными функциями *стационарного во времени случайного процесса* (в смысле теории случайных процессов).

2.8. Выводы

В результате проведенного в разделе исследования, нами установлено следующее.

1. Для того чтобы на теплоперенос в конденсированной среде оказывал существенное влияние радиационный теплообмен необходима реализация следующих условий. Среда должна находиться в твердой фазе, должна обладать слабым поглощением электромагнитного излучения в красной и инфра-красной областях спектра, ее тепловое состояние должно обладать большими градиентами температуры, порядка $\sim 100^\circ$ на сантиметр и, следовательно она должна быть сильно разогретой $\sim 10^3$C, то есть иметь большую температуру плавления. Такими свойствами обладают твердотельные полупрозрачные диэлектрики или высокоомные полупроводники.

2. Установлены характерные безразмерные параметры, которые являются характеристиками радиационного теплообмена в диэлектрической (полупроводящей) среде и малость которых позволяет построить позволяет построить такую флуктуационную теорию радиационного теплообмена. Таковыми являются: отношение радиуса корреляций r_0 пространственных

флуктуаций токов Фуко, наводящихся в среде в процессе переноса тепла излучением, к характерной длине $\bar{L}$, на которой существенен перепад температуры; отношение $\bar{L}$ к длине поглощения $\gamma/\bar{c}$ электромагнитного излучения в среде в красной и инфра-красной областях спектра ($\bar{c}$ – скорость света в среде); отношение $\varkappa/\bar{c}\bar{L}\mathrm{c}_V$, где $\varkappa$ – теплопроводность среды и c_V – ее теплоемкость при постоянном объеме. Причем должны иметь место следующие отношения между этими параметрами $\gamma\bar{L}/\bar{c} \ll r_0/\bar{L}$, $\varkappa/\bar{c}\bar{L}\mathrm{c}_V \ll r_0/\bar{L}$.

3. Построена математическая модель, на основе которой возможен учет флуктуаций теплового электромагнитного поля, порождаемого процессами излучения и поглощения излучения атомами (молекулами, ионами) среды вследствие их тепловых колебаний около равновесных значений. Диверегенция плотности потока энергии этого поля в рамках такой флуктуационной теории радиационного теплообмена интерпретируется как дополнительный распределенный тепловой источник в общем уравнении переноса тепла в среде, который учитывает влияние радиационного теплообмена. Модель представляет собой систему стохастических уравнений Максвелла в среде с малой электропроводностью, в которой стохастическим источником гауссовского типа являются флуктуации плотности электрического тока (флуктуационные токи Фуко), которые являются следствием имеющихся в среде тепловых колебаний. Этот источник моделируется в виде произведения стационарного по времени и стохастически однородного случайного поля на неслучайную функцию – амплитуду $a(\mathbf{x}, t; T)$, которая медленно зависит от изменения времени t и пространственной точки $\mathbf{x}$, причем эта зависимость полностью обеспечивается функциональной зависимостью амплитуды от текущего распределения $T(\mathbf{x}, t)$ температуры в среде.

4. В силу линейности уравнений Максвелла и гассовости стохастического источника с нулевым средним значением, стохастическое электромагнитное поле является гауссовским случайным полем с нулевым средним значением. Вычислены его парные корреляционные функции и показано, что при неограниченном увеличении времени таким образом, когда расстояние между двумя временными точками остается постоянным, это гауссовское случайное поле приближается стационарным по времени случайным гауссовским полем с нулевым средним значением, которое полностью определяется парными корреляционными функциями $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{E}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle_\infty$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle_\infty$, $\langle\!\langle \tilde{\bar{\mathbf{H}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1, t_1)\tilde{\bar{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2, t_2)\rangle\!\rangle_\infty$, определяемыми согласно формулам (7.9), (7.13), (7.17).

Глава 3. Уравнение переноса тепла в полупрозрачной твердотельной среде

В этой главе мы получаем основной результат работы. Будет вычислена плотность $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ потока энергии флуктуационного электромагнитного поля, распространяющегося в полупрозрачной диэлектрической среде, на основе которой формулируется базовое уравнение теплопереноса с учетом радиационного теплообмена.

Значения функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ в полупрозрачной среде зависят существенным образом от значений распределения температуры во всех пространственных точках ограниченного образца среды с размером $L \ll \bar{c} \cdot \bar{L}^2 \mathrm{c}_V / \varkappa = 3 \cdot (10^7 \div 10^9)$ (см. разд.(2.2)). Это связано с тем, что вид самого функционала зависит от геометрии образца среды, и учет условий на границе области, занимаемой средой, оказывается очень важным при решении задач теплопереноса в рамках флуктуационного подхода (см. [38], [39],[42]). В частности, вид функционала зависит от коэффициента отражения световых лучей при длинах волн, соответствующих красной и инфра-красной областям спектра (см. по этому поводу работу [39]), так как часть излучения, которая вышла из образца среды, уже не оказывает влияния на тепловые процессы, происходящие в нем. Такое положение является следствием полупрозрачности среды и оно существенного усложняет анализ стохастической модели, определяемой эволюционными уравнениями (1-4). Поэтому, в настоящей работе, мы рассматривается простейшая с физической точки зрения ситуация, когда имеется локализованная тепловая неоднородность в безграничной среде, которая сосредоточена в ограниченной области пространства с линейным размером L порядка $10 \div 10^2$ см, так, что при удалении радиус-вектора $\mathbf{x}$ на бесконечность температура среды стремится к постоянному значению. Таким образом, функционал $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ вычисляется в такой постановке задачи, когда граница среды не играет никакой роли.

Конкретные вычисления в этой главе будут произведены как в случае реального трехмерного пространства, так и в одномерном случае. Это делается с целью того, чтобы выявить математический механизм появления дополнительного весового множителя в интегральном преобразовании, определяющем вид функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$, о котором шла речь в первой главе и который отличает вид функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$, получаемого в рамках стандартной теории переноса излучения от предложенной в первой главе его модификации.

3.1. Постановка задачи о математическом описании теплопереноса с учетом радиационного теплообмена

Согласно анализу предыдущих глав диссертации, для описания эволюции распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ в области Ω пространства $\mathbb{R}^3$, заполненной полупрозрачной диэлектрической (полупроводниковой) средой, в рамках конструируемой флуктуационной теории радиационного теплообмена, нужно решить с начальным условием $T(\mathbf{x},0)$ уравнение теплопереноса (1.3.21), которое имеет вид

$$\mathrm{c_v}(T)\dot{T}(\mathbf{x},t) = \nabla_i \varkappa_{ij}(T)\nabla_j T(\mathbf{x},t) - (\nabla, \boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]) \tag{3.1.1}$$

и в котором функционал $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ определяется математическим ожиданием $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T] = \langle\!\langle\, \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t)\rangle\!\rangle$ и формулой (2.3.1) для плотности потока энергии

$$\tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t) = \frac{c}{4\pi}[\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{H}}](\mathbf{x},t)\,. \tag{3.1.2}$$

В свою очередь, стохастическое электромагнитное поле $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t),\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$ является решением системы стохастических уравнений Максвелла (2.3.2),

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\tilde{\boldsymbol{j}} = [\nabla,\tilde{\mathbf{H}}]\,, \qquad &(\nabla,\tilde{\mathbf{E}}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\tilde{\rho}\,,\\ &\frac{\mu}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} = -[\nabla,\tilde{\mathbf{E}}]\,, \qquad &(\nabla,\tilde{\mathbf{H}}) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

с некоторыми случайными начальными условиями для полей $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t_0)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t_0)$ и плотности распределения заряда $\tilde{\rho}(\mathbf{x},t_0)$, которые все не зависят друг от друга и обладают нулевыми средними значениями. По этим начальным условиям производится усреднение, независимое от стохастического источника $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x},t) = a(\mathbf{x},t;T)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$. При этом случайное поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$ в этом источнике является гауссовским с нулевым средним значением, и поэтому полностью определяется парной корреляционной функцией, имеющей общий вид, который определяется формулами (2.4.12), (2.4.13),

$$K_{j_1,j_2}(\mathbf{x}_1,t_1;\mathbf{x}_2,t_2) = \delta_{j_1,j_2}K(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|)\delta(t_1-t_2)\,, \tag{3.1.4}$$

где на функцию $K(\cdot)$ накладывается только условие суммируемости в $\mathbb{R}^3$ и она должна быть сосредоточена в малой окрестности нуля с радиусом r_0. В остальном выбор функции $K(\cdot)$ произволен, то есть определяющие ее параметры являются феноменологическими в рамках флуктуационной теории радиационного теплообмена. Случайное поле $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$, согласно виду корреляционной функции (4), представляет собой по временн'ой переменной t обобщенный стационарный случайный процесс (см. [70]), а по пространственным переменным – стохастически однородное случайное поле. Математическое ожидание при вычислении функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ производится как по начальным условиям, так и по распределению вероятностей поля $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$, которое статистически независимо от начальных условий.

Для полной постановки задачи об эволюции распределения температуры в $\mathbb{R}^3$ нужно теперь связать текущее распределение температуры $T(\mathbf{x}, t)$ с характеристикой стохастического источника, то есть, как это видно из выписанной системы уравнений, необходимо явно указать вид функционала $a(\mathbf{x}, t; T)$. Так как этот функционал играет роль амплитуды «колебаний» стохастического источника, то, не ограничивая общности, можно считать, что $a(\mathbf{x}, t; T) \geq 0$. Следовательно, достаточно задать явный вид величины $a^2(\mathbf{x}, t; T)$. Мы принимаем в этой работе, что она имеет следующий вид:

$$a^2(\mathbf{x}, t; T) = \hbar \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^3 f\Big(\frac{\hbar\omega}{\mathrm{k}\, T(\mathbf{x}, t)}\Big) d\omega \,, \tag{3.1.5}$$

то есть квадрат интенсивности определяется средним значением энергии тепловых фотонов в малой пространственной области, сосредоточенной около точки $\mathbf{x}$ в момент времени t. Тогда f – функция распределения по энергии излучаемых фотонов, которую определяем как зависящую от безразмерной переменной $\hbar\omega/\mathrm{k}\, T(\mathbf{x}, t)$ – отношения энергии фотона с частотой ω к удельной «средней» тепловой энергии $\mathrm{k}\, T(\mathbf{x}, t)$ фотонов, излучаемых из малой области с центром в пространственной точке $\mathbf{x}$ в момент времени t (см., например, [16]). В общем случае, вид функции f близок к планковской функции распределения. Если она, в точности, совпадает с планковской, то $a^2(\mathbf{x}, t; T) \sim T^4(\mathbf{x}, t)$.

Таким образом, изучение эволюции распределения температуры $T(\mathbf{x}, t)$ в среде сводится к решению математически точно поставленной выше задаче, содержащей, как составную часть, решение задачи Коши для смешанной эволюционной системы, которая состоит из детерминированного уравнения (1) и стохастической системы (3) с локализованным в $\mathbb{R}^3$ начальным условием вместе с уравнениями связи (2) и $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T] = \big\langle\!\big\langle\, \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x}, t) \big\rangle\!\big\rangle$.

Решение сформулированной задачи представляет собой неоправданно сложный путь для построения флуктуационной теории радиационного теплопереноса. Мы несколько упростим сформулированную задачу. С этой целью заметим, что если характерное время $\bar{L}^2 \mathrm{c}_V / \varkappa$ эволюции распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$, которое определяется уравнением (1) и которое в принятых нами физических условиях (см. разд. 2.2) составляет $10^{-3} \div 10^{-1}$ сек, намного превосходит характерное время изменения теплового электромагнитного поля внутри образца, то при решении сформулированной эволюционной задачи, с большой точностью, допустимо использовать усреднение стохастического электромагнитного поля по временны́м отрезкам длиной, много меньшей чем $\bar{L}^2 \mathrm{c}_V/\varkappa$ при фиксированном распределении $T(\mathbf{x},t)$ температуры в образце, то есть считать, что амплитуда $a(\mathbf{x},t;T)$ в системе стохастических уравнений Максвелла (3) не зависит от t. Для такой системы стохастических уравнений легко определить время, по прошествии которого соответствующий гауссовский случайный процесс $\langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t) \rangle$, описывающий флуктуации электромагнитного поля, с большой точностью аппроксимируется стационарным гауссовским случайным процессом. А именно, если $a(\mathbf{x},t;T)$ не зависит от t, то система стохастических дифференциальных уравнений (3) определяет бесконечномерный случайный процесс Орнштейна-Уленбека, время перехода которого в стационарный режим легко вычисляется на основе эквивалентной системы стохастических уравнений (2.5.2)-(2.5.5) в $\mathbf{k}$-пространстве и которое было определено нами во второй главе в разд. 8.

Так как все корреляционные функции $\left\langle\!\left\langle \bar{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\tilde{\mathbf{E}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\right\rangle$, $\left\langle\!\left\langle \bar{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\right\rangle$, $\left\langle\!\left\langle \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\right\rangle$ с большой точностью могут быть заменены на корреляционные функции $\left\langle\!\left\langle \bar{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\tilde{\mathbf{E}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\right\rangle_\infty$, $\left\langle\!\left\langle \bar{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\right\rangle_\infty$, $\left\langle\!\left\langle \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\bar{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\right\rangle_\infty$ по прошествии времени t_1 порядка γ^{-1}. Тогда, если эта величина много меньше $\bar{L}^2 \mathrm{c}_V/\varkappa$, то замена истинной амплитуды $a(\mathbf{x},t;T)$ на «усредненную» оправдана.

Для того, чтобы оценить характерное время γ^{-1} приведем сначала следующие значения для характерных малых безразмерных параметров, которые связаны с изучаемой физической ситуацией (см. разд. 2.2). Эти значения мы сводим в таблицы согласно значениям входящих в определение этих параметров физических характеристик среды, описанных в табл. 1-6.

Таблица 7

Значения малых параметров для высокоомных полупроводников

	$\varkappa/\bar{c}\bar{L}\mathrm{c}_V$	$\gamma\bar{L}/\bar{c}$	$r_0/\bar{L}$
400°C	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$	10^{-5}
600°C	10^{-6}	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
1000°C	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-2}$	10^{-4}

Таблица 8

Значения малых параметров для диэлектриков

	$\varkappa/\bar{c}\bar{L}c_V$	$\gamma\bar{L}/\bar{c}$	$r_0/\bar{L}$
400°C	$3\cdot 10^{-6}$	$3\cdot(10^{-12}\div 10^{-9})$	10^{-5}
600°C	10^{-6}	$3\cdot(10^{-11}\div 10^{-7})$	$3\cdot 10^{-5}$
1000°C	$3\cdot 10^{-4}$	$3\cdot(10^{-11}\div 10^{-5})$	10^{-4}

Из этих таблиц находим значения характерных временных параметров $\bar{L}^2 c_V/\varkappa$ и γ^{-1}. Эти значения находятся из значений, приведенных в таблицах 7 и 8, которые мы сводим в следующую табл. 9.

Таблица 9

Значения характерных временных параметров (сек)

диэлект.	$\bar{L}^2 c_V/\varkappa$	γ^{-1}
400°C	$10^{-7}\div 10^{-6}$	$0,6\div 3,5$
600°C	$3\cdot(10^{-7}\div 10^{-6})$	$0,2\div 0,5$
1000°C	$10^{-9}\div 10^{-8}$	$0,02\div 0,05$

полупров.	$\bar{L}^2 c_V/\varkappa$	γ^{-1}
400°C	$10^{-7}\div 10^{-6}$	$2\cdot(10^{-5}\div 10^{-3})$
600°C	$3\cdot(10^{-7}\div 10^{-6})$	$2\cdot(10^{-7}\div 10^{-5})$
1000°C	$10^{-9}\div 10^{-8}$	$2\cdot(10^{-10}\div 10^{-7})$

Из табл. 9 следует, что для диэлектриков сделанное нами выше предположение о выполнимости неравенства $\gamma^{-1} \ll \bar{L}^2 c_V/\varkappa$, действительно, имеет место. Тогда, для таких веществ возможно описанное выше упрощение решение задачи о переносе тепла с учетом радиационного теплообмена. А именно, достаточно решать стандартную начально-краевую задачу для уравнения (1), в котором функционал $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ получается усреднением $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T] = \left\langle\!\left\langle \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t)\right\rangle\!\right\rangle$ с использование формулы (2), где случайные поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$, $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)$ вычисляются по распределению вероятностей стационарного гауссовского процесса $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t),\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$, реализации которого подчиняются стохастическим уравнениям (3), то есть вычисляются на основе корреляционных функций $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle_\infty$, $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle_\infty$, $\left\langle\!\left\langle \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2)\right\rangle\!\right\rangle_\infty$. Таким образом, для сведения изучения теплопереноса с учетом радиационного теплообмена нужно вычислить среднее $\left\langle\!\left\langle \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t)\right\rangle\!\right\rangle$ в предположении о стационарности случайного процесса $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t),\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$. Решению именно этой задачи посвящены все последующие разделы настоящей главы.

Наконец, из табл. 8 следует, что имеют место неравенства $\gamma\bar{L}/\bar{c} \ll r_0/\bar{L} \ll 1$. Это означает, что допустимо существенное упрощение вычисления функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T] = \langle\!\langle\, \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t)\rangle\!\rangle$ посредством вычисления его асимптотического выражения при $\gamma\bar{L}/\bar{c} \to 0$ и $r_0/\bar{L} \to 0$. Причем, так как двухпараметрические асимптотики, в общем случае, зависят от связи между параметрами, по которым производится предельный переход, то из неравенства $\gamma\bar{L}/\bar{c} \ll r_0/\bar{L}$ вытекает, что при решении нашей задачи нужно вычислить т.н. *повторную асимптотику*, когда сначала вычисляется асимптотическое выражение при $\gamma\bar{L}/\bar{c} \to 0$, а затем, на его основе, вычисляется асимптотика при $r_0/\bar{L} \to 0$.

3.2. Общее решение задачи о плотности потока энергии теплового электромагнитного поля

3.2.1. Спектральное разложение стационарного процесса. Для исследования стационарного случайного процесса, основанного на случайных реализациях $\langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t),\, \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$, являющихся решениями системы уравнений (1.3), обратимся к эквивалентной системе уравнений (2.5.2)-(2.5.5) и, следуя тому положению, что стационарному процессу отвечают такие решения этой системы, которые представимы в виде обобщенного разложения в интеграл Фурье (см. [70]) по временно́й переменной [9)], запишем следующие *спектральные* разложения по частоте ω полей $\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t)$, $\tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t)$ и связанных с ними случайных функций в $\mathbf{k}$-пространстве:

$$\tilde{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{k},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega) e^{i\omega t} d\omega\,, \quad \tilde{\bar{\mathbf{H}}}(\mathbf{k},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega) e^{i\omega t} d\omega\,, \tag{3.2.1}$$

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{j}}}(\mathbf{k},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega) e^{i\omega t} d\omega\,, \quad \tilde{\bar{\rho}}(\mathbf{k},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varrho}(\mathbf{k},\omega) e^{i\omega t} d\omega\,, \tag{3.2.2}$$

где обобщенное случайное поле $\tilde{\imath}_l(\mathbf{k},\omega)$, определяющее спектральное разложение плотности флуктуационного тока, дается формулой

$$\tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \exp\big(-i\omega t - i(\mathbf{k},\mathbf{x})\big) a(\mathbf{x},t;T) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} dt\,. \tag{3.2.3}$$

[9)] Это возможно, так как не требуется учитывать т.н. сингулярную составляющую спектральной меры см. [71].

Для вычисления амплитуд спектрального разложения $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega)$, $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega)$, определяющих стационарный случайный процесс $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t),\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$, нужно найти их выражения через амплитуду спектрального разложения $\tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega)$ случайного процесса $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$, который является источником процесса $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t),\ \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$. Для решения этой задачи перейдем от эволюционных уравнений (2.5.2)-(2.5.5) к уравнениям для амплитуд спектрального разложения полей, которые являются, вообще говоря, обобщенными функциями от частоты ω. Подставляя разложения (1-3) в уравнения (2.5.2)-(2.5.5) и пользуясь однозначностью Фурье-образов, получаем для них замкнутую систему уравнений:

$$i\omega\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega)\ +\gamma\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega)+\frac{4\pi}{\varepsilon}\,\tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega)=\frac{ic}{\varepsilon}[\mathbf{k},\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega)]\,, \tag{3.2.4}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega)\ =-\frac{c}{\mu\omega}[\mathbf{k},\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega)]\,, \tag{3.2.5}$$

$$(\mathbf{k},\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega))=-\frac{4\pi i}{\varepsilon}\,\tilde{\varrho}(\mathbf{k},\omega)\,,\quad (\mathbf{k},\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega))=0\,, \tag{3.2.6}$$

$$i\omega\tilde{\varrho}(\mathbf{k},\omega)+\gamma\tilde{\varrho}(\mathbf{k},\omega)+i(\mathbf{k},\tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega))=0\,, \tag{3.2.7}$$

Решениями этой системы уравнений для Фурье-образов полей $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega)$ и $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega)$ являются:

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega)=i\frac{4\pi}{\varepsilon}\cdot\frac{\Big((\omega^2-i\omega\gamma)\tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega)-\bar{c}^2(\mathbf{k},\tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega))\mathbf{k}\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)}\,, \tag{3.2.8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega)=-i\frac{4\pi c}{\varepsilon\mu}\cdot\frac{[\mathbf{k},\tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega)]}{(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)}\,. \tag{3.2.9}$$

Здесь Фурье-образы $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega)$ $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega)$, $\tilde{\boldsymbol{\imath}}(\mathbf{k},\omega))$, $\tilde{\varrho}(\mathbf{k},\omega)$ являются обобщенными функциями на пространстве бесконечно дифференцируемых, быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^4$.

3.2.2. Плотность потока энергии в стационарном режиме. Подсчитаем среднюю плотность потока излучения $S_j(\mathbf{x},t)$, $j=1,2,3$, каждая компонента которой, по определению, равна

$$S_j[\mathbf{x},t;T]=\frac{c}{4\pi}\langle\!\langle[\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{H}(\mathbf{x},t)]_j\rangle\!\rangle=$$

$$=\epsilon_{jll'}\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^8}\exp\Big[i(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\mathbf{x})+i(\omega-\omega')t\Big]\Big\langle\!\!\Big\langle\tilde{\mathcal{E}}_l(\mathbf{k},\omega)\tilde{\mathcal{H}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega')\Big\rangle\!\!\Big\rangle d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega'\,, \tag{3.2.10}$$

где $\epsilon_{jll'}$ – полностью антисимметричный псевдотензор в $\mathbb{R}^3$ (символ Леви-Чивита).

Математическое ожидание в формуле (10), на основе формул (8) и (9) для случайных полей $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{k},\omega), \tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(\mathbf{k},\omega)$, следующим образом выражается через корреляционную функцию случайного поля $\tilde{\boldsymbol{\iota}}(\mathbf{k},\omega)$,

$$\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\mathcal{E}}_l(\mathbf{k},\omega)\tilde{\mathcal{H}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega') \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$-\frac{(4\pi)^2 c}{\varepsilon^2\mu}\cdot\frac{\epsilon_{l'mm'}k'_m\Big(\omega(\omega-i\gamma)\delta_{ln}-\bar{c}^2k_lk_n\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2\mathbf{k}'^2+i\omega'\gamma)}\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\boldsymbol{\iota}}_n(\mathbf{k},\omega)\tilde{\boldsymbol{\iota}}^*_{m'}(\mathbf{k}',\omega')\right\rangle\!\!\right\rangle. \tag{3.2.11}$$

В свою очередь, эта корреляционная функция находится на основе разложения (3),

$$\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\boldsymbol{\iota}}_l(\mathbf{k},\omega)\tilde{\boldsymbol{\iota}}^*_{l'}(\mathbf{k}',\omega')\right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^8}\int\limits_{\mathbb{R}^8}\exp\Big(i(\mathbf{k}',\mathbf{y}')-i(\mathbf{k},\mathbf{y})\Big)\exp\Big(i\omega's'-i\omega s\Big)a(\mathbf{y},s;T)a(\mathbf{y}',s';T)\times$$

$$\times\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_l(\mathbf{y},s)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^*_{l'}(\mathbf{y}',s')\right\rangle\!\!\right\rangle d\mathbf{y}d\mathbf{y}'dsds' =$$

$$=\frac{\delta_{l,l'}}{(2\pi)^8}\int\limits_{\mathbb{R}^8}\exp\Big(i(\mathbf{k}',\mathbf{y}')-i(\mathbf{k},\mathbf{y})\Big)\exp\Big(i\omega's'-i\omega s\Big)a(\mathbf{y},s;T)a(\mathbf{y}',s';T)\times$$

$$\times K(|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|)\delta(s-s')d\mathbf{y}d\mathbf{y}'dsds' =$$

$$=\frac{\delta_{ll'}}{(2\pi)^8}\int\limits_{\mathbb{R}^7}a(\mathbf{y},s;T)a(\mathbf{y}',s;T)K(|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|)\times$$

$$\times\exp\Big[i\Big((\mathbf{k}',\mathbf{y}')-(\mathbf{k},\mathbf{y})+s(\omega'-\omega)\Big)\Big]d\mathbf{y}d\mathbf{y}'ds\equiv\delta_{l,l'}I(\mathbf{k},\mathbf{k}';\omega'-\omega)\,. \tag{3.2.12}$$

Введем постоянную

$$R=4\pi\bar{c}^2/\varepsilon\,. \tag{3.2.13}$$

Подставим, далее, выражение (11) в (10), учитывая формулу (12) для корреляционной функции $\left\langle\!\left\langle \tilde{\boldsymbol{\iota}}_n(\mathbf{k},\omega)\tilde{\boldsymbol{\iota}}^*_{m'}(\mathbf{k}',\omega')\right\rangle\!\right\rangle$,

$$S_j[\mathbf{x},t;T]=-R\int\limits_{\mathbb{R}^8}\exp\Big[i(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\mathbf{x})+i(\omega-\omega')t\Big]I(\mathbf{k},\mathbf{k}';\omega'-\omega)\times$$

$$\times \frac{\delta_{n,m'}\epsilon_{jll'}\epsilon_{l'mm'}k'_m\Big(\omega(\omega-i\gamma)\delta_{ln}-\bar{c}^2k_lk_n\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2\mathbf{k}'^2+i\omega'\gamma)}\,d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega'\,.$$

Воспользуемся теперь тензорным тождеством $\epsilon_{jll'}\epsilon_{l'mn}=\delta_{jm}\delta_{ln}-\delta_{jn}\delta_{lm}$. Тогда, вводя функцию

$$\bar{R}_j(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega')=-R\frac{\Big(k'_j(2\omega(\omega-i\gamma)-\bar{c}^2\mathbf{k}^2)+\bar{c}^2k_j(k_mk'_m)\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2\mathbf{k}'^2+i\omega'\gamma)}\,, \tag{3.2.14}$$

в результате, приходим к следующему выражению для плотности потока энергии,

$$S_j[\mathbf{x},t;T]=\int\limits_{\mathbb{R}^8}\exp\Big[i(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\mathbf{x})+i(\omega-\omega')t\Big]I(\mathbf{k},\mathbf{k}';\omega'-\omega)\times$$

$$\times\,\bar{R}_j(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega')\,d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega'\,.$$

Произведем замену в подинтегральном выражении функции $I(\mathbf{k},\mathbf{k}';\omega'-\omega)$ на ее явный вид, даваемый формулой (12),

$$S_j[\mathbf{x},t;T]=\int\limits_{\mathbb{R}^7}R_j(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s;\mathbf{x}-\mathbf{y}',t-s)\times$$

$$\times\,K(|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|)a(\mathbf{y},s;T)a(\mathbf{y}',s;T)d\mathbf{y}d\mathbf{y}'ds\,, \tag{3.2.15}$$

где интегральное ядро определяется формулой

$$R_j(\mathbf{y},s;\mathbf{y}',s')=\frac{1}{(2\pi)^8}\int\limits_{\mathbb{R}^8}\bar{R}_j(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega')\times$$

$$\times\exp\Big[i\big((\mathbf{k},\mathbf{y})-(\mathbf{k}',\mathbf{y}')\big)+i(\omega s-\omega's')\Big]d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega'\,. \tag{3.2.16}$$

Подставляя в подинтегральное выражение определение (14) функции $\bar{R}_j(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega')$, находим, что функция

$$R_j(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')=-\frac{R}{(2\pi)^8}\int\limits_{\mathbb{R}^8}\frac{\Big(k'_j(2\omega(\omega-i\gamma)-\bar{c}^2\mathbf{k}^2)+\bar{c}^2k_j(k_mk'_m)\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2\mathbf{k}'^2+i\omega'\gamma)}\times$$

$$\times\exp\Big[i\big((\mathbf{k},\mathbf{x})-(\mathbf{k}',\mathbf{x}')\big)+i(\omega t-\omega't')\Big]d\mathbf{k}d\mathbf{k}'d\omega d\omega'$$

представима в виде

$$R_j(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') = -R\Big[iU(\mathbf{x},t)\nabla'_j V^*(\mathbf{x}',t') +$$

$$+\dot{V}(\mathbf{x},t)\nabla'_j V^*(\mathbf{x}',t') - i\bar{c}^2\nabla_m\nabla_j W(\mathbf{x},t)\nabla'_m V^*(\mathbf{x}',t')\Big]\,, \quad (3.2.17)$$

где операторы ∇_j и ∇'_m обозначают градиенты по векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, соответственно, точка обозначает дифференцирование по t и функции $U(\mathbf{x},t)$, $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$ даются следующими интегральными представлениями,

$$U(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x}) + i\omega t)}{\omega - i\gamma}\, d\mathbf{k}d\omega\,, \quad (3.2.18)$$

$$V(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x}) + i\omega t)}{\omega^2 - \bar{c}^2\mathbf{k}^2 - i\omega\gamma}\, d\mathbf{k}d\omega\,, \quad (3.2.19)$$

$$W(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x}) + i\omega t)}{(\omega - i\gamma)(\omega^2 - \bar{c}^2\mathbf{k}^2 - i\omega\gamma)}\, d\mathbf{k}d\omega\,. \quad (3.2.20)$$

Функции (18-20) нужно понимать, согласно их определению, как обобщенные над пространством Шварца $\mathrm{S}(\mathbb{R}^4)$ в качестве пространства основных функций. Заметим, что функции $U(\mathbf{x},t)$ и $W(\mathbf{x},t)$ принимает чисто мнимые значения, а функция $V(\mathbf{x},t)$ вещественнозначна.

Интегральное ядро допускает физическую интерпретацию, как определяющее вклады в плотность потока энергии в точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$ [10] от двух источников излучения, которые находятся в различных пространственных точках с радиус-векторами $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}'$.

В соответствии с разбиением (17) ядра $R_j(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')$ на три слагаемых, разобьем плотность потока энергии $S_j[\mathbf{x},t;T]$ на три части:

$$S_j[\mathbf{x},t;T] = S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) + S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) + S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)\,, \quad (3.2.21)$$

где, согласно (15) и (17), каждое слагаемое имеет вид:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = -iR\int_{\mathbb{R}^7} U(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1, t-s)\nabla_j V^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2, t-s)\times$$

$$\times K(|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{y}_1,s;T)a(\mathbf{y}_2,s;T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,, \quad (3.2.22)$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -R\int_{\mathbb{R}^7} [\dot{V}(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1, t-s)][\nabla_j V^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2, t-s)]\times$$

---

[10] Плотность потока энергии пропорциональна квадрату электромагнитного поля.

$$\times K(|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{y}_1,s;T)a(\mathbf{y}_2,s;T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,, \quad (3.2.23)$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = i\bar{c}^2 R\int_{\mathbb{R}^7}[\nabla_m\nabla_j W(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s)][\nabla_m V^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s)]\times$$
$$\times K(|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{y}_1,s;T)a(\mathbf{y}_2,s;T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,. \quad (3.2.24)$$

3.3. Анализ обобщенных функций U, V, W

В этом разделе мы найдем асимптотические формулы для обобщенных функций $U(\mathbf{x},t)$, $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$, которые определяют вклады $S_j^{(p)}(\mathbf{x},t)$, $p\in\{u,v,w\}$ в плотность потока $S_j[\mathbf{x},t;T]$ при стремлении малого параметра $\gamma\bar{L}/\bar{c}\to 0$ при любом фиксированном значении параметра $r_0/\bar{L}$, так как от величины этого параметра эти функции не зависят. Такая процедура необходима, с одной стороны, в связи с тем, что функции $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$ не вычисляются точно в терминах стандартных обобщенных функций, что вносит неадекватное усложнение формулы для $S_j[\mathbf{x},t;T]$, а, с другой стороны, ввиду того, что нашей целью является вычисление величины $S_j[\mathbf{x},t;T]$ только в применении ее в развиваемой нами флуктуационной теории радиационного теплообмена в полупрозрачных диэлектрических кристаллах, для чего, согласно рассмотрениям раздела 2.2, достаточно найти главный член асимптотики дивергенции вектор-функции $S_j[\mathbf{x},t;T]$ в указанном пределе.

3.3.1. Функция $U(\mathbf{x},t)$. Для обобщенной функции $U(\mathbf{x},t)$ легко находится точное выражение

$$U(\mathbf{x},t) = \frac{\delta(\mathbf{x})}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\gamma}\,d\omega = i\Theta(t)\delta(\mathbf{x})e^{-\gamma t}\,, \qquad \Theta(t) = \begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}, \quad (3.3.1)$$

где использовано интегральное представление для трехмерной δ-функции

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x}))\,d\mathbf{k}$$

и для функции Хевисайда

$$\Theta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\gamma}\,d\omega\,, \quad \gamma>0\,,$$

полученное вычислением его в полюсе $\omega = i\gamma$ в верхней полуплоскости комплексной переменной интегрирования ω.

3.3.2. Функция $V(\mathbf{x},t)$. Функция $V(\mathbf{x},t)$ не имеет такого простого явного представления, аналогичного представлению (1) для $U(\mathbf{x},t)$. Поэтому мы найдем для нее асимптотические представление при $\gamma\bar{L}/\bar{c} \to 0$.

Обозначим $\omega(k) = (\bar{c}^2\mathbf{k}^2 - (\gamma/2)^2)^{1/2}$, $k = |\mathbf{k}|$. Для нахождения выражения обобщенной функции $V(\mathbf{x},t)$, выполним сначала интегрирование по ω, используя полюса $\omega = i\gamma/2 \pm \omega(k)$ в определяющем ее интеграле (2.19), замыкая контур интегрирования большой дугой в верхней полуплоскости, так как именно в верхней полуплоскости находятся оба полюса вне зависимости от значения k^2,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\exp(i\omega t)}{\omega^2 - \bar{c}^2\mathbf{k}^2 - i\omega\gamma}\, d\omega = i\pi e^{-\gamma t/2}\Big[\frac{\exp(i\omega(k)t)}{\omega(k)} - \frac{\exp(-i\omega(k)t)}{\omega(k)}\Big] =$$

$$= -\frac{2\pi}{\omega(k)} e^{-\gamma t/2}\sin(\omega(k)t)\,.$$

В результате, после подстановки этого выражения в (2.19), получаем следующее представление

$$V(\mathbf{x},t) = -e^{-\gamma t/2}\,\frac{\Theta(t)}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\, d\mathbf{k}\,. \tag{3.3.2}$$

Вычисление же интеграла по углам в этом представлении приводит к выражению

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\, d\mathbf{k} = 2\pi\int\limits_0^\infty k^2\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\, dk\int\limits_0^\pi e^{ik|\mathbf{x}|\cos\theta}\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{|\mathbf{x}|}\int\limits_0^\infty k\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\sin(k|\mathbf{x}|)\, dk = -\frac{4\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\cos(kr)\, dk =$$

$$= -\frac{2\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^\infty \Big[\sin(\omega(k)t + kr) + \sin(\omega(k)t - kr)\Big]\,\frac{dk}{\omega(k)} =$$

$$= -\frac{2\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(v(-r,t) + v(r,t)\Big)\,, \tag{3.3.3}$$

где введено обозначение $r = |\mathbf{x}|$ и функция

$$v(r,t) = \int\limits_0^\infty \sin(\omega(k)t + kr)\frac{dk}{\omega(k)}\,. \tag{3.3.4}$$

Вычислим асимптотику функции $v(r,t)$ при $\gamma\bar{L}/c \to 0$. Разобьем интеграл на две части, согласно двум интервалам интегрирования $[0, \gamma/2\bar{c}]$ и $[\gamma/2\bar{c}, \infty)$. Асимптотические значения интегралов по каждому из интервалов вычисляются различным образом.

Интеграл по полуоси $[\gamma/2\bar{c}, \infty)$, после явного введения в подинтегральное выражение параметра $\bar{L}$ посредством замены переменной интегрирования $k \Rightarrow k/\bar{L}$, запишем в виде:

$$\int\limits_{\gamma/2\bar{c}}^\infty \sin(\omega(k)t + kr)\frac{dk}{\omega(k)} =$$

$$= \bar{c}^{\,-1}\int\limits_{\gamma\bar{L}/2\bar{c}}^\infty \sin\left(\bar{L}^{-1}\left[\bar{c}t\sqrt{k^2 - (\gamma\bar{L}/2\bar{c})^2} + kr\right]\right)\frac{dk}{\sqrt{k^2 - (\gamma\bar{L}/2\bar{c})^2}}\,.$$

Теперь после сдвига переменной интегрирования $k \Rightarrow k + \gamma\bar{L}/2\bar{c}$ становится возможным непосредственный переход к пределу $\gamma\bar{L}/\bar{c} \to 0$,

$$\lim_{\gamma L/\bar{c}\to 0}\int_{\gamma/2\bar{c}}^\infty \sin(\omega(k)t + kr)\frac{dk}{\omega(k)} =$$

$$= \lim_{\gamma L/\bar{c}\to 0}\bar{c}^{\,-1}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(\bar{L}^{-1}\left[\bar{c}t\big(k^2 + k(\gamma\bar{L}/\bar{c})\big)^{1/2} + \big(k + (\gamma\bar{L}/2\bar{c})r\big)\right]\right)}{\big(k^2 + k(\gamma\bar{L}/\bar{c})\big)^{1/2}}dk =$$

$$= \bar{c}^{\,-1}\int\limits_0^\infty \sin\left[\frac{\big(\bar{c}t + r\big)k}{\bar{L}}\right]\frac{dk}{k} = \frac{\pi}{2\bar{c}}\,\mathrm{sgn}(\bar{c}t + r)\,.$$ [11]

Таким образом, мы получили, что при $\gamma \to 0$

$$\int\limits_{\gamma/2\bar{c}}^\infty \sin(\omega(k)t + kr)\frac{dk}{\omega(k)} \to \frac{\pi}{2\bar{c}}\,\mathrm{sgn}(\bar{c}t + r)\,. \tag{3.3.5}$$

[11] См. [72]

Покажем, что интеграл по интервалу $[0, \gamma/2\bar{c}]$, умноженный на $e^{-\gamma t/2}$, имеет равномерно по $t \in \mathbb{R}$ и $r < L$ асимптотику при $\gamma \bar{L}/\bar{c} \to 0$, которая не зависит от r. Следовательно таким же свойством обладает асимптотика функции $v(r,t)$, и поэтому она не дает вклад в асимптотику функции $V(\mathbf{x}, t)$ согласно формуле (3). Произведя в этом интеграле точно такие преобразования, как и в предыдущем, находим

$$\int_0^{\gamma/2\bar{c}} \sin(\omega(k)t + kr)\frac{dk}{\omega(k)} = \int_0^{\gamma/2\bar{c}} \sin(i|\,\omega(k)|\,t + kr)\frac{dk}{i|\,\omega(k)|}\,. \tag{3.3.6}$$

Совершим в этом интеграле замену переменной интегрирования $k = \gamma \sin\eta/2\bar{c}$. Тогда интеграл (6) представляется в виде

$$-\frac{i}{\bar{c}}\int_0^{\pi/2} \sin\Big(\frac{\gamma r}{2\bar{c}}\sin\eta + i\frac{\gamma t}{2}\cos\eta\Big)d\eta =$$

$$-\frac{i}{\bar{c}}\int_0^{\pi/2} \sin\Big(\frac{\gamma r}{2\bar{c}}\sin\eta\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{\gamma t}{2}\cos\eta\Big)d\eta + \frac{1}{\bar{c}}\int_0^{\pi/2} \cos\Big(\frac{\gamma r}{2\bar{c}}\sin\eta\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{\gamma t}{2}\cos\eta\Big)d\eta.$$

Заметим теперь, что функция $V(\mathbf{x}, t)$ вещественнозначна. Поэтому достаточно вычислить вещественную часть ее асимптотики, то есть вычислить главный член асимптотики второго слагаемого. Для этого слагаемого при $r < L$ имеем

$$\int_0^{\pi/2} \cos\Big(\frac{\gamma r}{2\bar{c}}\sin\eta\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{\gamma t}{2}\cos\eta\Big)d\eta \sim \int_0^{\pi/2} \mathrm{sh}\Big(\frac{\gamma t}{2}\cos\eta\Big)d\eta\,. \tag{3.3.7}$$

Следовательно главный член асимптотики, действительно, не зависит от r, и, в силу того, что функция

$$g(t) \equiv e^{-\gamma t/2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{sh}\Big(\frac{\gamma t}{2}\cos\eta\Big)d\eta = \int_0^{\pi/4} \Big(\exp\big(-\gamma t\sin^2\eta\big) - \exp\big(-\gamma t\cos^2\eta\big)\Big)d\eta \tag{3.3.8}$$

ограничена по γt, эта асимптотика равномерна по t.

Таким образом, на основании проведенного анализа, с учетом формулы (4) и правила дифференцирования функции $\mathrm{sgn}(r)$, получаем, что главный член асимптотики производной имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} v(r,t) = \frac{\pi}{\bar{c}}\, \delta(\bar{c}t + r)\,.$$

Тогда, учитывая, что выражение для функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ вычисляется для значений $t > 0$ и $r \geq 0$, то есть $\delta(r + \bar{c}t) = 0$, получаем, что, при переходе к пределу $\gamma\bar{L}/\bar{c} \to 0$, в формуле (3) нужно оставить только производную

$$\frac{\partial}{\partial r} v(-r,t) = -\frac{\pi}{\bar{c}}\, \delta(r - \bar{c}t)\,.$$

В результате, на основании формул (2- 4), получаем окончательное выражение для асимптотики функции $V(\mathbf{x},t)$ в интересующей нас области изменения переменных $r > 0$ и $t > 0$,

$$V(\mathbf{x},t) = -\frac{\Theta(t)}{4\pi\bar{c}r}\, e^{-\gamma t/2} \delta(r - \bar{c}t)\,. \tag{3.3.9}$$

3.3.3. Функция $W(\mathbf{x},t)$. Обобщенная функция $W(\mathbf{x},t)$ также как и функция $V(\mathbf{x},t)$ не имеет простого явного представления. Вычислим ее асимптотику в при $\gamma\bar{L}/\bar{c} \to 0$.

Вычисляя интеграл по ω в формуле (2.20) точно также как это было сделано при вычислении функции $V(\mathbf{x},t)$, используя три полюса $\omega = i\gamma$, $\omega_\pm(k) = i\gamma/2 \pm \omega(k)$, $\gamma > 0$ аналитической подинтегральной функции, которые лежат в верхней полуплоскости, получим

$$W(\mathbf{x},t) = -i\frac{\Theta(t)}{4\pi}\Big[\frac{e^{-\gamma t}}{\bar{c}^2 r} + \frac{e^{-\gamma t/2}}{2\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \Big[\frac{e^{i\omega(k)t}}{\omega_-(k)} - \frac{e^{-i\omega(k)t}}{\omega_+(k)}\Big] \frac{d\mathbf{k}}{2\omega(k)}\Big]\,, \tag{3.3.10}$$

так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}}{k^2} d\mathbf{k} = \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^\infty \frac{\sin\, kr}{k}\, dk = \frac{2\pi^2}{r}\ .$$

Преобразование подинтегрального выражения в (10) с использованием формул

$$\omega_+(k)\omega_-(k) = (i\gamma/2 + \omega(k))(i\gamma/2 - \omega(k)) = -\bar{c}^2 k^2\,,$$
$$e^{i\omega(k)t}\omega_+(k) - e^{-i\omega(k)t}\omega_-(k) = 2\omega(k)\cos(\omega(k)t) - \gamma\sin(\omega(k)t)$$

дает следующее представление для $W(\mathbf{x},t)$:

$$W(\mathbf{x},t) = -i\frac{\Theta(t)}{4\pi\bar{c}^2}\Big[\frac{e^{-\gamma t}}{r} + \frac{e^{-\gamma t/2}}{4\pi^2}\big(\gamma w(\mathbf{x},t) - 2\dot{w}(\mathbf{x},t)\big)\Big]\,, \tag{3.3.11}$$

где

$$w(\mathbf{x},t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\,\frac{d\mathbf{k}}{k^2}\,. \tag{3.3.12}$$

Для вычисления асимптотики функции $w(\mathbf{x},t)$ перейдем в интеграле к сферическим координатам

$$w(\mathbf{x},t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}}{k^2}\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\,d\mathbf{k}=\frac{4\pi}{r}\int\limits_0^\infty \sin\,kr\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\frac{dk}{k} \tag{3.3.13}$$

и, точно также как при вычислении асимптотики $V(\mathbf{x},t)$, разобьем интервал интегрирования на две части, интегрируя отдельно по интервалам $[0,\gamma/2\bar{c}]$ и $[\gamma/2\bar{c},\infty)$.

При интегрировании по полуоси $[\gamma/2\bar{c},\infty)$ заменим переменную интегрирования $k\Rightarrow k+\gamma/2\bar{c}$ и затем обезразмерим ее посредством замены $k\Rightarrow k/\bar{L}$. В результате, в подинтегральном выражении появляется малый параметр $\gamma\bar{L}/\bar{c}$,

$$\int\limits_{\gamma/2\bar{c}}^\infty \sin\,kr\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\frac{dk}{k}=$$

$$=\frac{\bar{L}}{\bar{c}}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\Big[k+(\gamma\bar{L}/2\bar{c})(r/\bar{L})\Big]\sin\Big[(\bar{c}t/\bar{L})\sqrt{k^2+k(\gamma\bar{L}/\bar{c})}\,\Big]}{\big(k+(\gamma\bar{L}/2\bar{c})\big)\sqrt{k^2+k(\gamma\bar{L}/\bar{c})}}\,dk\,.$$

Предел этого выражения при $\gamma\bar{L}/\bar{c}\to 0$ равен

$$\int\limits_{\gamma/2\bar{c}}^\infty \sin\,kr\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\frac{dk}{k}\to\bar{c}^{-1}\int\limits_0^\infty \sin\,kr\cdot\sin(k\bar{c}t)\frac{dk}{k^2}\,. \tag{3.3.14}$$

Продифференцируем интеграл в этом предельном выражении по r,

$$\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^\infty \sin\,kr\cdot\sin(k\bar{c}t)\frac{dk}{k^2}=\int\limits_0^\infty \cos\,kr\cdot\sin(k\bar{c}t)\frac{dk}{k}=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\int\limits_0^\infty \sin\,k(r+\bar{c}t)\frac{dk}{k}-\int\limits_0^\infty \sin\,k(r-\bar{c}t)\frac{dk}{k}\Big]=\frac{\pi}{4}\Big[\mathrm{sgn}(r+\bar{c}t)-\mathrm{sgn}(r-\bar{c}t)\Big].$$

Так как исходный интеграл в (14) равен нулю при $r = 0$, то на основании явного значения его производной, находим, что

$$\int\limits_0^\infty \sin\, kr \cdot \sin(k\bar{c}t)\frac{dk}{k^2} = \frac{\pi}{4}[|r+\bar{c}t| - |r-\bar{c}t|]\,. \tag{3.3.15}$$

Таким образом, из (14) и (15) следует

$$\lim_{\gamma\bar{L}/\bar{c}\to 0}\int\limits_{\gamma/2\bar{c}}^\infty \sin\, kr\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\frac{dk}{k} = \frac{\pi}{4\bar{c}}[|r+\bar{c}t| - |r-\bar{c}t|]\,. \tag{3.3.16}$$

Асимптотика интеграла по интервалу $[0, \gamma/2\bar{c}]$ находится таким же образом как и для интеграла по этому же интервалу при вычислении асимптотики функции $V(\mathbf{x}, t)$, посредством замены переменной $k = (\gamma/2\bar{c})\sin\eta$,

$$\int\limits_0^{\gamma/2\bar{c}} \sin\, kr\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\frac{dk}{k} = \frac{2}{\gamma}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin\,\big((\gamma r/2\bar{c})\sin\eta\big)}{\sin\eta}\,\mathrm{sh}\Big(\frac{\gamma t}{2}\cos\eta\Big)d\eta\,. \tag{3.3.17}$$

Заметим, что этот интеграл равен нулю при $r = 0$. Тогда достаточно найти асимптотику производной по r правой части равенства (17), которая, с точностью до множителя $\bar{c}^{-1}$, совпадает с интегралом в левой части формулы (7), и поэтому асимптотика такой производной при $\gamma\bar{L}/\bar{c} \to 0$ определяется правой частью этой формулой. На основании этого замечания, интегрированием по r асимптотической формулы (8), получаем

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^{\gamma/2\bar{c}} \sin\, kr\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\frac{dk}{k} \sim \frac{e^{\gamma t/2}}{\bar{c}}\,g(t)\,. \tag{3.3.18}$$

Принимая теперь во внимание формулы (13), (16) и (18), запишем окончательно асимптотическое выражение для функции $w(\mathbf{x}, t)$,

$$w(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\pi^2}{r\bar{c}}\big[|r+\bar{c}t| - |r-\bar{c}t|\big] + \frac{4\pi}{\bar{c}}\,e^{\gamma t/2}g(t)\,. \tag{3.3.19}$$

Тогда асимптотическое выражение для производной по t дается формулой:

$$\dot{w}(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\pi^2}{r}\big[\mathrm{sgn}(r+\bar{c}t) + \mathrm{sgn}(r-\bar{c}t)\big] + \frac{4\pi}{\bar{c}}\,\frac{d}{dt}\Big(e^{\gamma t/2}g(t)\Big)\,. \tag{3.3.20}$$

Следовательно, подставляя асимптотические выражения (19) и (20) в (11), находим асимптотическую формулу для обобщенной функции $W(\mathbf{x},t)$:

$$W(\mathbf{x},t) \sim -\frac{i\Theta(t)}{4\pi\bar{c}^2}\Big[\frac{e^{-\gamma t}}{r} -$$

$$-\frac{1}{2r}\,e^{-\gamma t/2}\left(\operatorname{sgn}(r+\bar{c}t)+\operatorname{sgn}(r-\bar{c}t)-\frac{\gamma}{2\bar{c}}\big[|r+\bar{c}t|-|r-\bar{c}t|\big]\right)-\frac{2\dot{g}(t)}{\pi\bar{c}}\Big]\,.$$

Наконец, учтем, что в базовые формулы (2.21), (2.24) для плотности потока энергии входят производные по пространственным координатам функции $W(\mathbf{x},t)$. Поэтому выпишем асимптотическую формулу для градиента $\nabla W(\mathbf{x},t)$ в условиях, когда $\gamma\bar{L}/\bar{c}\to 0$. При дифференцировании по $\mathbf{x}$ пропадает последнее слагаемое, а предпоследнее стремится к нулю,

$$\nabla W(\mathbf{x},t) \sim -\frac{i\Theta(t)}{4\pi\bar{c}^2}\,e^{-\gamma t/2}\,\nabla\, r^{-1}\left[e^{-\gamma t/2}-\frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}(r+\bar{c}t)+\operatorname{sgn}(r-\bar{c}t)\right)\right]. \tag{3.3.21}$$

3.4. Функционал $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ в пределе $r_0/\bar{L}\to 0$

В этом разделе мы получим асимптотическое в смысле предельного перехода $\gamma L/\bar{c}\to 0$ выражение для функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$, которое решает задачу, поставленную в разделе 3.2. Это позволит дать окончательное решение основной задачи диссертации – найти вид уравнения теплопереноса в диэлектрических полупрозрачных средах с учетом радиационного теплообмена в условиях их сильного нагрева при больших перепадах температуры.

Сначала найдем такие интегральные представления для функционалов $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$ (см. (2.22-2.24)), которые не содержат δ-функционных особенностей. Во всех формулах (2.22-2.24) в подинтегральных выражениях содержится градиент функции $V(\mathbf{x},t)$, в которой пространственная переменная $\mathbf{x}$ заменена на $\mathbf{x}-\mathbf{y}_2$ и временна́я переменная t – на $t-s$ и которая содержит δ-функционную особенность. Во всех этих формулах в подинтегральном выражении имеется градиент ∇ по пространственной переменной $\mathbf{x}$. Тогда, для нахождения указанных интегральных представлений, сначала, в каждой из этих формул, используя зависимость от разности $\mathbf{x}-\mathbf{y}_2$, заменим градиент ∇ на взятый с обратным знаком градиент $-\nabla^{(2)}$ по пространственной переменной $\mathbf{y}_2$. Затем выполним интегрирование по частям (применяя формулу Гаусса для объемного интеграла от дивергенции векторного поля с учетом того, что поверхностный интеграл по бесконечно удаленной поверхности от этого векторного поля равен нулю) по переменной $\mathbf{y}_2$, перебрасывая градиент $\nabla^{(2)}$ по этой пространственной переменной на гладкие функции. (Здесь и далее, мы будем использовать обозначение $\nabla^{(j)}$ для градиентов, соответственно, по переменным $\mathbf{y}_j$, $j = 1, 2$.) После этого, подставив явное выражение для функции $V(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t - s)$, понизим кратность интегрирования в каждой из формул посредством вычисления интеграла по s используя δ-функцию.

После первых двух из описанных преобразований, получаем следующие формулы:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x}, t) = -iR \int\limits_{\mathbb{R}^7} V(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t - s)\, U(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t - s) \times$$

$$\times \nabla_j^{(2)} \Big[K(|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|) a(\mathbf{y}_1, s; T) a(\mathbf{y}_2, s; T) \Big] d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,,$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x}, t) = -R \int\limits_{\mathbb{R}^7} V(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t - s)\, \dot{V}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t - s) \times$$

$$\times \nabla_j^{(2)} \Big[K(|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|) a(\mathbf{y}_1, s; T) a(\mathbf{y}_2, s; T) \Big] d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,,$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x}, t) = i\bar{c}^2 R \int\limits_{\mathbb{R}^7} V(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t - s) \left[\nabla_m \nabla_j W(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t - s) \right] \times$$

$$\times \nabla_m^{(2)} \Big[K(|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|) a(\mathbf{y}_1, s; T) a(\mathbf{y}_2, s; T) \Big] d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,.$$

Подстановка явного вида функции $V(\mathbf{x}, t)$ в эти формулы приводит к следующим выражениям для вектор-функций $S_j^{(u)}(\mathbf{x}, t)$, $S_j^{(v)}(\mathbf{x}, t)$, $S_j^{(w)}(\mathbf{x}, t)$:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x}, t) = \frac{iR}{4\pi\bar{c}} \int\limits_{\mathbb{R}^7} \Theta(t - s) e^{-\gamma(t-s)/2}\, \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2| - \bar{c}(t - s))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2|}\, U(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t - s) \times$$

$$\times \nabla_j^{(2)} \Big[K(|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|) a(\mathbf{y}_1, s; T) a(\mathbf{y}_2, s; T) \Big] d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,,$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x}, t) = \frac{R}{4\pi\bar{c}} \int\limits_{\mathbb{R}^7} \Theta(t - s) e^{-\gamma(t-s)/2}\, \frac{\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2| - \bar{c}(t - s))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2|}\, \dot{V}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t - s) \times$$

$$\times \nabla_j^{(2)} \Big[K(|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|) a(\mathbf{y}_1, s; T) a(\mathbf{y}_2, s; T) \Big] d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,,$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = -\frac{i\bar{c}R}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^7}\Theta(t-s)e^{-\gamma(t-s)/2}\,\frac{\delta(|\mathbf{x}-\mathbf{y}_2|-\bar{c}(t-s))}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}_2|}\times$$

$$\times[\nabla_m\nabla_j W(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s)]\nabla_m^{(2)}\Big[K(|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{y}_1,s;T)a(\mathbf{y}_2,s;T)\Big]d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 ds\,.$$

После вычисления интеграла по s с использованием δ-функции и замен переменных интегрирования $\mathbf{y}_p \Rightarrow \mathbf{x}-\mathbf{y}_p$, $p=1,2$, находим следующие выражения:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = -\frac{iR}{4\pi\bar{c}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|}\,U(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\times$$

$$\times\Big(\nabla_j^{(2)}\Big[K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s;T)\Big]\Big)_{s=|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,,$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -\frac{R}{4\pi\bar{c}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|}\,\dot{V}(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\times$$

$$\times\Big(\nabla_j^{(2)}\Big[K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s;T)\Big]\Big)_{s=|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,,$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = \frac{iR}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|}\,\Big(\nabla_j^{(1)}\nabla_m^{(1)}W(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\Big)\times$$

$$\times\Big(\nabla_m^{(2)}\Big[K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-s;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-s;T)\Big]\Big)_{s=|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,.$$

Наконец, учтем, что зависимость амплитуды $a(\mathbf{x},t;T)$ от пространственных переменных является очень медленной по сравнению с зависимостью корреляционной функции $K(\cdot)$, и поэтому при решении нашей задачи мы считаем ее, как уже было сказано об этом в предыдущей главе, постоянной. Следовательно, последние формулы записываются в принятом приближении в следующем виде:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = -\frac{iR}{4\pi\bar{c}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|}\,U(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\times$$

$$\times\Big(\nabla_j^{(2)}K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)\Big)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,, \tag{3.4.1}$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -\frac{R}{4\pi\bar{c}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|}\,\dot{V}(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\times$$

$$\times\Big(\nabla_j^{(2)}K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)\Big)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2\,, \tag{3.4.2}$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = \frac{iR}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|}\,W(\mathbf{y}_1,|\mathbf{y}_2|/\bar{c})\times$$

$$\times\Big(\nabla_j^{(1)}\nabla_m^{(1)}\nabla_m^{(2)}K(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|)\Big)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t-|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t-|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2\,, \tag{3.4.3}$$

где, на основании (3.21), в последнюю формулу достаточно вставить, вместо функции $W(\mathbf{x},t)$, следующую функцию:

$$W(\mathbf{x},t) \sim -\frac{i\Theta(t)}{4\pi\bar{c}^2}\,e^{-\gamma t/2}\,r^{-1}\left[e^{-\gamma t/2}-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{sgn}(r+\bar{c}t)+\mathrm{sgn}(r-\bar{c}t)\Big)\right]. \tag{3.4.4}$$

В такой форме вектор-функции $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$ представляют собой искомые интегральные представления. При этом мы, дополнительно, интегрируя дважды по частям по переменной $\mathbf{y}_1$, перебросили перебросили градиенты по $\mathbf{y}_1$ на корреляционную функцию с учетом сделанного замечания о пренебрежении производными функции $a(\mathbf{x},t;T)$ по пространственным координатам. Заметим, однако, в подинтегральных все еще имеются δ-функционные сингулярности, которые содержатся в функциях U и $\dot{V}$.

Выясним структуру главных членов асимптотического поведения функций $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$ при стремлении к нулю параметра $r_0/L\to 0$, то есть в пределе малого радиуса корреляций. Для осуществления такого предельного перехода нужно ввести явным образом параметр r_0 в эти выражения. Это достигается посредством представления корреляционной функции в (1) в виде $K(|\mathbf{x}|) = r_0^{-3}Q(\mathbf{x}^2/2r_0^2)$, что обеспечивает независимость от r_0 интеграла $\int K(|\mathbf{z}|)d\mathbf{z}$. Однако, так как подинтегральная функция имеет особенность при $r=0$, то переход к пределу при $r_0/L\to 0$, невозможен посредством замены в подинтегральном выражении $K(|\mathbf{z}|)$ на $K\delta(\mathbf{z})$ с положительной постоянной K.

После введения в явном виде зависимости от r_0 в подинтегральное выражение в (1), произведем замены переменных $\mathbf{y}_1/r_0 \Rightarrow \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2/r_0 \Rightarrow \mathbf{y}_2$ с использованием формулы (2.4.14), $K(r) = r_0^{-3} Q(r^2/2r_0^2)$:

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = -\frac{i r_0 R}{4\pi \bar{c}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{e^{-\gamma r_0 |\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|} \left(\nabla_j^{(2)} Q(|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2/2)\right) U(r_0\mathbf{y}_1, r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}) \times$$

$$\times a(\mathbf{x} - r_0\mathbf{y}_1, t - r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}; T) a(\mathbf{x} - r_0\mathbf{y}_2, t - r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}; T) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,, \qquad (3.4.5)$$

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -\frac{r_0 R}{4\pi \bar{c}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{e^{-\gamma r_0 |\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|} \left(\nabla_j^{(2)} Q(|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2/2)\right) \dot{V}(r_0\mathbf{y}_1, r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}) \times$$

$$\times a(\mathbf{x} - r_0\mathbf{y}_1, t - r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}; T) a(\mathbf{x} - r_0\mathbf{y}_2, t - r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}; T) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,, \qquad (3.4.6)$$

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = \frac{iR}{4\pi r_0} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{e^{-\gamma r_0 |\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|} \left(\nabla_j^{(1)} \nabla_m^{(1)} \nabla_m^{(2)} Q(|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2/2)\right) \times$$

$$\times W(r_0\mathbf{y}_1, r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}) a(\mathbf{x} - r_0\mathbf{y}_1, t - r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}; T) a(\mathbf{x} - r_0\mathbf{y}_2, t - r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}; T) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,, \qquad (3.4.7)$$

где в последнюю формулу, на основании (4), нужно подставить функцию

$$W(r_0\mathbf{y}_1, r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}) \sim -i \frac{e^{-\gamma r_0 |\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{4 r_0 \pi \bar{c}^2 |\mathbf{y}_1|} \left[e^{-\gamma r_0 |\mathbf{y}_2|/2\bar{c}} - \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sgn}(|\mathbf{y}_1| - |\mathbf{y}_2|)\right) \right], \qquad (3.4.8)$$

так как $r_0|\mathbf{y}_2| \geq 0$, $\operatorname{sgn}(|\mathbf{y}_1| + |\mathbf{y}_2|) = 1$.

3.4.1. Асимптотика функции $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$ в пределе $r_0/L \to 0$. Для вычисления главного члена асимптотического разложения функции $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$ при $r_0 \to 0$ подставим в подинтегральное выражение функцию $U(\mathbf{x},t)$ в виде (3.3.1),

$$S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = \frac{r_0 R}{4\pi \bar{c}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{e^{-3\gamma r_0 |\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|} \left(\nabla_j^{(2)} Q(|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2/2)\right) \delta(r_0\mathbf{y}_1) \times$$

$$\times a(\mathbf{x} - r_0\mathbf{y}_1, t - r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}; T) a(\mathbf{x} - r_0\mathbf{y}_2, t - r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}; T) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,.$$

Вычисляя интеграл по $\mathbf{y}_1$, используя δ-функцию, после перехода к пределу $r_0 \to 0$ в подинтегральном выражении, что допустимо, так как функция $a(\mathbf{x}, t; T)$ непрерывно зависит от $\mathbf{x}$ и t (см. (1.5)) и $r_0|\mathbf{x}|/\bar{c} < r_0 L/\bar{c} \ll 1$, а функция $\nabla_j Q(\mathbf{y}^2/2)$ непрерывна и суммируема, получаем асимптотическую формулу:

$$S_j^{(u)} = a^2(\mathbf{x},t;T)\Big(\frac{r_0^{-2}R}{4\pi\bar{c}^2}\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla_j Q(\mathbf{y}^2/2)}{|\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y} + r_0^{-2}o(1)\,.$$

Первое слагаемое в этой формуле обращается в нуль, ввиду сферической симметрии корреляционной функции. Таким образом, окончательно получаем $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t) = r_0^{-2}o(1)$ при $r_0 \to 0$.

3.4.2. Асимптотика функции $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$ в пределе $r_0/\bar{L} \to 0$. Вычислим асимптотику интеграла в формуле (6), воспользовавшись асимптотикой (3.9) при $t > 0$ функции $V(\mathbf{x},t)$. При этом производная по времени этого асимптотического выражения при $t > 0$ равна

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) = -\frac{\gamma}{2}V(\mathbf{x},t) + \frac{\Theta(t)}{4\pi r}\,e^{-\gamma t/2}\delta'(r-\bar{c}t)\,. \tag{3.4.9}$$

Тогда, подставляя это выражение для $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ в (6), получаем

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = -\frac{R}{(4\pi\bar{c})^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big(\nabla_j^{(2)}Q(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|^2/2)\Big)\,\times$$

$$\Big(\frac{\gamma}{2\bar{c}}\,\delta(r_0(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|))+\delta'(r_0(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|))\Big)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2, \tag{3.4.10}$$

где учтен переход к пределу $r_0 \to 0$ во временных аргументах функций $a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_k, t-r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)$, $k = 1,2$, как это было сделано в предыдущем пункте, ввиду $r_0 L/\bar{c} \ll 1$.

Слагаемым, пропорциональным $\gamma/\bar{c}$, сразу пренебречь нельзя, несмотря на то, что после обезразмеривания переменных интегрирования, возникает малый коэффициент $\gamma\bar{L}/\bar{c} << r_0/\bar{L}$. Для того чтобы им можно было пренебречь, нужно сначала выяснить какой порядок по r_0^{-1} имеет соответствующий ему интеграл, так как асимптотическая зависимость этого интеграла с отрицательной степенью r_0 может компенсировать малость параметра $\gamma\bar{L}/\bar{c}$. Запишем интеграл, соответствующий этому слагаемому в сферических координатах $\mathbf{y}_1 = \langle\eta,\mathbf{n}_1\rangle$ и $\mathbf{y}_2 = \langle\eta,\mathbf{n}_2\rangle$, где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ – единичные векторы:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big(\nabla_j^{(2)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2)\Big)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2,t;T)\times$$

$$
\times\delta(r_0(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|))d\mathbf{y}_1d\mathbf{y}_2 =
$$

$$
= r_0^{-1}\int\limits_0^\infty \eta^3\exp\big[-\gamma r_0\eta/\bar{c}\big]d\eta \int\limits_{\mathbf{n}_1^2=\mathbf{n}_2^2=1} Q'(\eta^2|\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_1|^2/2)\times
$$

$$
\times\ a(\mathbf{x}-r_0\eta\mathbf{n}_1,t;T)a(\mathbf{x}-r_0\eta\mathbf{n}_2,t;T)(\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2)_j d\Omega(\mathbf{n}_1)d\Omega(\mathbf{n}_2)\,,
$$

где введены: переменная интегрирования $\eta=|\mathbf{y}_1|=|\mathbf{y}_2|$ и интегрирования $d\Omega(\mathbf{n}_1)$ и $d\Omega(\mathbf{n}_2)$ по телесным углам направлений $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ векторов $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ соответственно. Последний интеграл равен нулю, так во внутреннем интеграле подинтегральное выражение антисимметрично относительно перестановки $\mathbf{n}_1\Leftrightarrow\mathbf{n}_2$. Этот вывод справедлив в том случае, когда выписанный интеграл сходится. При этом безразлично, какой порядок по параметрам $r_0/\bar{L}$ и $\gamma\bar{L}/\bar{c}$ имеет его значение. Докажем абсолютную сходимость этого интеграла при условии, что $|a(\mathbf{x},t;T)|\le M=\mathrm{const}$.

Достаточно установить сходимость следующего интеграла

$$
\int\limits_0^\infty \eta^3\exp\big[-\gamma r_0\eta/\bar{c}\big]d\eta \int\limits_{\mathbf{n}_1^2=\mathbf{n}_2^2=1} |Q'(\eta^2|\mathbf{n}_2-\mathbf{n}_1|^2/2)|d\Omega(\mathbf{n}_1)d\Omega(\mathbf{n}_2)\,.
$$

Введем в подинтегральном выражении явную параметризацию единичного вектора $\mathbf{n}_2=\langle\theta,\phi\rangle$, где полярный угол θ сферической системы координат отсчитывается от направления $\mathbf{n}_1$, а азимутальная ось, от которой отсчитывается угол ϕ направлена произвольным образом. В этом случае $\eta^2(\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2)^2/2=\eta^2(1-\cos\theta)=\zeta$. Тогда исследуемый интеграл, после интегрирования по $d\Omega(\mathbf{n}_1)$ и азимутальному углу ϕ осуществляется следующим образом:

$$
8\pi^2\int\limits_0^\infty \eta\exp\big[-\gamma r_0\eta/\bar{c}\big]d\eta\int\limits_0^{2\eta^2}|Q'(\zeta)|d\zeta <
$$

$$
< 8\pi^2\int\limits_0^\infty \eta\exp\big[-\gamma r_0\eta/\bar{c}\big]d\eta\cdot\int\limits_0^\infty|Q'(\zeta)|d\zeta<\infty\,,
$$

где сходимость обеспечивается суммируемостью производной $Q'(\cdot)$, $\int\limits_0^\infty|Q'(\zeta)|d\zeta<\infty$. Это условие является дополнительным к постулируемому во второй главе свойству суммируемости корреляционной функции.

В результате проведенного исследования, заключаем, что интеграл, соответствующий первому слагаемому в (10), имеет порядок $(\gamma\bar{L}/\bar{c})o(1)$ при $r_0/\bar{L} \to 0$.

Оценим теперь вклад в асимптотику функции $S_j^{(v)}(\mathbf{x}, t)$ от второго слагаемого в формуле (10), связанного с $\delta'(\cdot)$-функцией. Для вычисления главного члена асимптотики соответствующего интеграла возвратимся снова к переменным интегрирования $r_0\mathbf{y}_j \Rightarrow \mathbf{y}_j$, $j = 1, 2$. Вводя обозначение $\bar{R} = Rr_0^{-3}/(4\pi\bar{c})^2$, запишем этот интеграл в виде

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x}, t) \sim -\bar{R}\int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big(\nabla_j^{(2)} Q(|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2/2r_0^2)\Big) \times$$

$$\times\, \delta'(|\mathbf{y}_1| - |\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t; T)a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t; T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 =$$

$$= -r_0^{-2}\bar{R}\int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)_j\, Q'(|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2/2r_0^2) \times$$

$$\times\, \delta'(|\mathbf{y}_1| - |\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t; T)a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t; T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 =$$

$$= -r_0^{-2}\bar{R}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\gamma|\,\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2|}\, a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t; T)\Big(C_\parallel(\mathbf{y}_2)\mathbf{n} + \mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2)\Big)d\mathbf{y}_2\,, \qquad (3.4.11)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{y}_2/|\mathbf{y}_2|$ и

$$C_\parallel(\mathbf{y}_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\,\mathbf{y}_2| - (\mathbf{n}, \mathbf{y}_1)}{|\,\mathbf{y}_1|}\, Q'(|\,\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2/2r_0^2)\delta'(|\,\mathbf{y}_1| - |\,\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t; T)d\mathbf{y}_1\,,$$

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{y}_1 - (\mathbf{y}_1, \mathbf{n})\mathbf{n}}{|\,\mathbf{y}_1|}\, Q'(|\,\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2/2r_0^2)\delta'(|\,\mathbf{y}_1| - |\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1, t; T)d\mathbf{y}_1$$

так, что $(\mathbf{C}_\perp, \mathbf{n}) = 0$.

Преобразуем $C_\parallel(\mathbf{y}_2)$, переходя в сферические координаты с радиальной координатой $|\mathbf{y}_1| = r$, вводя векторы $\mathbf{m} = \cos\theta\mathbf{n} + \sin\theta\mathbf{l}(\phi)$, $\mathbf{l}(\phi) = \mathbf{e}_1\cos\phi + \mathbf{e}_2\sin\phi$ и $\mathbf{z}^2 = \mathbf{y}_2^2 + r^2 - 2r|\mathbf{y}_2|\cos\theta$ с полярным углом θ, отсчитываемым от направления $\mathbf{n}$, После этого, полагая $\zeta = \cos\theta$,

$$C_\parallel(\mathbf{y}_2) = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\infty} r(|\mathbf{y}_2| - r\cos\theta)Q'\big(\mathbf{z}^2/2r_0^2\big) \times$$

$$\times\, \delta'(r - |\mathbf{y}_2|)a(\mathbf{x} - r\mathbf{m}, t; T)dr =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} \left(\frac{d}{dr}\Big[r(|\mathbf{y}_2| - r\zeta)Q'\big(\mathbf{z}^2/2r_0^2\big)a(\mathbf{x} - r\mathbf{m}, t; T)\Big]\right)_{r=|\mathbf{y}_2|} d\zeta =$$

$$= -r_0^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2r_0^{-2}} \Big[(2r_0^2\zeta - 1)|\mathbf{y}_2|Q'(\mathbf{y}_2^2\zeta) + r_0^2\Big(|\mathbf{y}_2|^3\zeta^2\Big)Q''(\mathbf{y}_2^2\zeta)\Big] \times$$

$$\times\, a(\mathbf{x} - |\mathbf{y}_2|\mathbf{m}, t; T)d\zeta\,,$$

где произведена замена переменной интегрирования $(1-\zeta)/r_0^2 \Rightarrow \zeta$ и поэтому $\mathbf{m} = (1 - r_0^2\zeta)\mathbf{n} + r_0(\zeta(2 - r_0^2\zeta))^{1/2}\mathbf{l}(\phi)$ и $\mathbf{z}^2 = 2\mathbf{y}_2^2\zeta$. При этом мы не дифференцировали функцию $a(\mathbf{x} - r\mathbf{m}, t; T)$ по r, ввиду сделанной нами ранее договоренности о том, что производные этой функции по пространственной переменной содержат дополнительный малый безразмерный множитель $\sim \varkappa/\bar{c}\bar{L}c_V$. Кроме того, здесь использовано предположение о конечности интеграла

$$\int_0^\infty \zeta^2|Q''(\zeta)|d\zeta < \infty\,.$$

Так как $\mathbf{m} \to \mathbf{n}$ при $r_0 \to 0$, то из полученного интегрального представления получаем, что главный член асимптотики интеграла $C_\parallel(\mathbf{y}_2)$, при таком предельном переходе, равен

$$C_\parallel(\mathbf{y}_2) \sim r_0^2 a(\mathbf{x} - |\mathbf{y}_2|\mathbf{n}, t; T) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty |\mathbf{y}_2|Q'(\mathbf{y}_2^2\zeta)d\zeta \;=$$

$$= -\frac{2\pi Q_0}{|\mathbf{y}_2|} r_0^2 a(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2, t; T)\,, \tag{3.4.12}$$

где предполагается, что положительная постоянная $Q_0 = Q(0) < \infty$ конечна (так как является значением корреляционной функции в нуле).

Преобразуем теперь, используя δ'-функцию, интеграл $\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2)$, переходя к сферическим координатам и используя те же обозначения, которые были употреблены при преобразованиях интеграла $C_\parallel(\mathbf{y}_2)$,

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty r^2\mathbf{l}(\phi)\sin\theta\, Q'(\mathbf{z}^2/2r_0^2)\,\delta'(|\,\mathbf{y}_1| - |\mathbf{y}_2|)\times$$

$$\times\, a(\mathbf{x} - r\mathbf{m}, t; T)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \mathbf{l}(\phi)d\phi \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{d}{dr}\Big[r^2 Q'\big(\mathbf{z}^2/2r_0^2\big)a(\mathbf{x}-r\mathbf{m},t;T)\Big]\right)_{r=|\mathbf{y}_2|} \sin^2\theta d\theta\,.$$

Используя сначала замену $\cos\theta = \zeta$, посредством точно таких же преобразований внутреннего интеграла по ζ, которые были применены при вычислении $C_\parallel(\mathbf{y}_2)$, с учетом того, что функцию $a(\mathbf{x}-r\mathbf{m},t;T)$ не нужно дифференцировать по r, приходим к следующему выражению:

$$\left(\frac{d}{dr}\Big[r^2 Q'\big(\mathbf{z}^2/2r_0^2\big)\Big]\right)_{r=|\mathbf{y}_2|} =$$

$$= 2|\mathbf{y}_2|Q'\big(\mathbf{y}_2^2(1-\zeta)/r_0^2\big) + |\mathbf{y}_2|^3(1-\zeta)Q''\big(\mathbf{y}_2^2(1-\zeta)/r_0^2\big)/r_0^2\,.$$

Следовательно, после замены переменной интегрирования $(1-\zeta)/r_0^2 \Rightarrow \zeta$, имеем

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = r_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \mathbf{l}(\phi)d\phi \int\limits_0^{2/r_0^2} \Big[2|\mathbf{y}_2|Q'\big(\mathbf{y}_2^2\zeta\big) + |\mathbf{y}_2|^3\zeta Q''\big(\mathbf{y}_2^2\zeta\big)\Big] \times$$

$$\times \Big[\zeta(2-r_0^2\zeta)\Big]^{1/2} a(\mathbf{x}-|\mathbf{y}_2|\mathbf{m},t;T)d\zeta\,,$$

так как $\mathbf{z}^2 = 2\mathbf{y}_2^2\zeta$, где $\mathbf{m} = (1-r_0^2\zeta)\mathbf{n} + r_0(\zeta(2-r_0^2\zeta))^{1/2}\mathbf{l}(\phi)$. Переходя к пределу $r_0 \to 0$ в полученном представлении, получаем асимптотическую формулу

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = r_0^3\, a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T) \int\limits_0^{2\pi} \mathbf{l}(\phi)d\phi \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} \Big[2|\mathbf{y}_2|Q'\big(\mathbf{y}_2^2\zeta\big) + |\mathbf{y}_2|^3\zeta Q''\big(\mathbf{y}_2^2\zeta\big)\Big]\Big(2\zeta\Big)^{1/2} d\zeta\,,$$

так как $\mathbf{m}(\phi) \to \mathbf{n}$. Тогда, так как внутренний интеграл не зависит от ϕ и $\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{l}(\phi)d\phi = 0$, то окончательно получаем, что

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = o(r_0^3)\,.$$

Из этой асимптотической формулы и (12) следует:

$$C_\parallel(\mathbf{y}_2)\mathbf{n} + \mathbf{C}_\perp(\mathbf{y}_2) = -\mathbf{n}\,\frac{2\pi Q_0}{|\mathbf{y}_2|} r_0^2 a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\Big(1+o(1)\Big)\,, \qquad (3.4.13)$$

Подставляя асимптотическую формулу (13) в (11), находим главный член асимптотики функции $S_j^{(v)}(\mathbf{x},t)$ с точностью до $r_0^{-3}o(1)$,

$$S_j^{(v)}(\mathbf{x},t) = \frac{r_0^{-3}RQ_0}{8\pi\bar{c}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{y_j e^{-\gamma|\mathbf{y}|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}|^3}\,a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y},t;T)d\mathbf{y}\,. \tag{3.4.14}$$

Эта формула показывает, что при вычислении главного члена асимптотики $S_j[\mathbf{x},t;T]$ плотности потока энергии слагаемым $S_j^{(u)}(\mathbf{x},t)$ можно пренебречь.

3.4.3. Асимптотика функции $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$ в пределе $r_0/\bar{L}\to 0$. Перейдем теперь к вычислению асимптотики функции $S_j^{(w)}(\mathbf{x},t)$. Подставляя выражение (8) для функции $W(r_0\mathbf{y}_1, r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c})$ в (7), а также произведя замены переменных интегрирования $r_0\mathbf{y}_k \Rightarrow \mathbf{y}_k$, $k=1,2$, находим

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x},t) = \frac{R}{(4\pi\bar{c}r_0)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\,\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big(\nabla_j^{(1)}\nabla_m^{(1)}\nabla_m^{(2)}Q(|\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|^2/2)\Big)\times$$
$$\times\left[e^{-\gamma r_0|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}} - \frac{1}{2}\Big(1+\operatorname{sgn}(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)\Big)\right]\times$$
$$\times\, a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_1, t-r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)a(\mathbf{x}-r_0\mathbf{y}_2, t-r_0|\mathbf{y}_2|/\bar{c};T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 =$$

$$-\frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big(\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\Big)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)\times$$
$$\times\left[e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}} - \frac{1}{2}\Big(1+\operatorname{sgn}(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)\Big)\right]d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 \equiv S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t)+S_j^{(w,2)}(\mathbf{x},t)\,, \tag{3.4.15}$$

где слагаемые $S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t)$, $S_j^{(w,2)}(\mathbf{x},t)$ определяются согласно разбиению на два слагаемых в квадратной скобке.

Определим главный член асимптотики первого слагаемого

$$S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t) \equiv -\frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\frac{e^{-3\gamma|\mathbf{y}_2|/2\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big(\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\Big)\times$$
$$\times\, a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,.$$

Заменим переменные интегрирования, согласно формулам $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$, $\mathbf{z} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ так, что якобиан перехода равен 1, а затем заменим $\mathbf{z}/r_0 \Rightarrow \mathbf{z}$. В результате, получим

$$S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t) \equiv -\frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{\exp\big[-3\gamma|\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2|/2\bar{c}\big]}{|\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2||\mathbf{y}+r_0\mathbf{z}/2|}\Big[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\Big]\times$$

$$\times\, a(\mathbf{x}-\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}+r_0\mathbf{z}/2,t;T)d\mathbf{y}d\mathbf{z}\,,$$

где верхний индекс $\mathbf{z}$ у дифференциальных операторов $\nabla^{(\mathbf{z})}$ и $\Delta^{(\mathbf{z})}$ указывает на то, что дифференцирования производятся по компонентам вектора $\mathbf{z}$. Переходя к пределу $r_0 \to 0$ в подинтегральном выражении, находим, что коэффициент в главном члене асимптотики вектор-функции $S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t)$, пропорциональный r_0^{-3}, равен нулю, так как равно нулю предельное при $r_0 \to 0$ выражение интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-3\gamma|\mathbf{y}|/2\bar{c}}}{\mathbf{y}^2}\, a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y},t;T)d\mathbf{y} \,\times \int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\Big]d\mathbf{z} = 0\,.$$

Это связано с тем, что в указанном произведении интегралов оба из них являются сходящимися. Для второго интеграла утверждение о его сходимости связано с предположением об абсолютной сходимости интеграла для корреляционной функции

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\big|\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2)\big|d\mathbf{z} < \infty\,,$$

что эквивалентно, используя сферическую симметрию функции $Q(\cdot)$, сходимости следующего интеграла

$$\int\limits_0^\infty \zeta^2|Q'''(\zeta)|d\zeta < \infty\,.$$

Тогда замена в нем переменной интегрирования $\mathbf{z} \Rightarrow -\mathbf{z}$ во втором интеграле изменяет знак его значения на обратный. Поэтому он равен нулю.

Наконец, рассмотрим второе слагаемое в (15), которое, с учетом тождества $[1+\mathrm{sgn}(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)]/2 = \Theta(|\mathbf{y}_1|-|\mathbf{y}_2|)$, записывается в виде

$$S_j^{(w,2)}(\mathbf{x},t) \equiv \frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6:|\mathbf{y}_1|\geq|\mathbf{y}_2|} \frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}_2|/\bar{c}}}{|\mathbf{y}_2||\mathbf{y}_1|}\Big(\nabla_j^{(1)}\Delta^{(1)}Q((\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1)^2/2r_0^2)\Big)\times$$

$$\times\, a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}_2,t;T)d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2\,.$$

Производя те же самые замены переменных интегрирования, что и при анализе функции $S_j^{(w,1)}(\mathbf{x},t)$, приходим к следующей формуле

$$S_j^{(w,2)}(\mathbf{x},t) \equiv \frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6:(\mathbf{y},\mathbf{z})\ge 0}\frac{\exp\big[-\gamma|\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2|/\bar{c}\big]}{|\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2||\mathbf{y}+r_0\mathbf{z}/2|}\Big(\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\Big)\times$$

$$\times a(\mathbf{x}-\mathbf{y}-r_0\mathbf{z}/2,t;T)a(\mathbf{x}-\mathbf{y}+r_0\mathbf{z}/2,t;T)d\mathbf{y}d\mathbf{z}\,,$$

так как неравенство $|\mathbf{y}_1| \ge |\mathbf{y}_2|$ в переменных интегрирования $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ эквивалентно неравенству $(\mathbf{y},\mathbf{z}) \ge 0$ в новых переменных интегрирования $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2)/2$, $\mathbf{z} = \mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2$. Переходя к пределу $r_0 \to 0$ в полученной формуле, находим главный член асимптотики анализируемой функции в следующем виде:

$$S_j^{(w,2)}(\mathbf{x},t) \sim \frac{r_0^{-3}R}{(4\pi\bar{c})^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\gamma|\mathbf{y}|/\bar{c}}}{\mathbf{y}^2}\,a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y},t;T)d\mathbf{y}\,\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3:(\mathbf{y},\mathbf{z})\ge 0}\Big[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\Big]d\mathbf{z}\,. \qquad (3.4.16)$$

Преобразуем внутренний интеграл, используя для него формулу векторного анализа для преобразования объемного интеграла от градиента функции в поверхностный интеграла от самой функции [81]-[83], сводя интегрирование по полупространству векторов $\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3 : (\mathbf{y},\mathbf{z})\ge 0\}$ к интегрированию по ограничивающей его поверхности

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3:(\mathbf{y},\mathbf{z})\ge 0}\Big[\nabla_j^{(\mathbf{z})}\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\Big]d\mathbf{z} = -n_j\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big[\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)\Big]d\Sigma(\mathbf{z})\,. \qquad (3.4.17)$$

Здесь интегрирование производится по плоскости $\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3 : (\mathbf{y},\mathbf{z}) = 0\}$ векторов $\mathbf{z}$, перпендикулярной $\mathbf{n} = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ и проходящей через точку $\mathbf{z} = 0$, $d\Sigma(\mathbf{z})$ – дифференциал площади этой поверхности. При этом, так как интегрирование, согласно упомянутой формуле, должно производиться по ориентированной поверхности, то вектор нормали к плоскости должен быть направлен из полупространства $\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3 : (\mathbf{y},\mathbf{z})\ge 0\}$ наружу, то есть в направлении $-\mathbf{n}$. Описанное преобразования объемного интеграла по полупространству векторов $\mathbf{z}$ справедливо, так как $\Delta^{(\mathbf{z})}Q(\mathbf{z}^2/2)$ настолько быстро стремится к нулю в $\mathbb{R}^3$ при $|\mathbf{z}| \to \infty$, что обращается в нуль поверхностный интеграл по неограниченно расширяющейся цилиндрической поверхности в пространстве векторов $\mathbf{z}$ с основанием цилиндра на плоскости $z_3 = 0$. Это связано с абсолютной интегрируемостью функции $Q''(\cdot)$ с квадратичным весом.

Перейдем в последнем интеграле к полярным координатам $\langle \eta, \phi \rangle$, $\eta \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi]$ в плоскости интегрирования. В результате, выполнив интегрирование по $\phi \in [0, 2\pi]$, запишем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Delta^{(\mathbf{z})} Q(\mathbf{z}^2/2) d\Sigma(\mathbf{z}) = \int\limits_{-}^{2\pi} d\phi \int\limits_0^\infty \Big[\Delta^{(\mathbf{z})} Q(\mathbf{z}^2/2)\Big] \eta d\eta =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^\infty \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\Big) Q\Big(\frac{\eta^2 + z_3^2}{2}\Big)\Big]_{z_3=0} d\eta =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^\infty \eta\, Q'(\eta^2/2) d\eta = -2\pi Q_0 \,.$$

Подставляя это выражение в (17),

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3 : (\mathbf{y}, \mathbf{z}) > 0} \Big[\nabla_j^{(\mathbf{z})} \Delta^{(\mathbf{z})} Q(\mathbf{z}^2/2)\Big] d\mathbf{z} = 2\pi Q_0 n_j \,,$$

а затем в (16) получим, с учетом обращения в нуль коэффициента при r_0^{-3} в асимптотике функции $S_j^{(w,1)}(\mathbf{x}, t)$, асимптотическое выражение для плотности потока

$$S_j^{(w)}(\mathbf{x}, t) = S_j^{(w,2)}(\mathbf{x}, t)(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{r_0^{-3} R Q_0}{8\pi \bar{c}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{y_j e^{-\gamma |\mathbf{y}|/\bar{c}}}{\mathbf{y}^3} a^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t; T) d\mathbf{y} \cdot (1 + o(1)) \,. \qquad (3.4.18)$$

3.4.4. Асимптотика функции $S_j[\mathbf{x}, t; T]$ в пределе $r_0/\bar{L} \to 0$. Из анализа, проведенного в пунктах 3.4.1 - 3.4.3, главный член асимптотики плотности потока энергии $S_j[\mathbf{x}, t; T]$, согласно (2.21), асимптотической формуле $S_j^{(u)}(\mathbf{x}, t) = r_0^{-2} o(1)$ и сумме асимптотических выражений, представленных формулами (14) и (18), дается следующей формулой:

$$S_j[\mathbf{x},t;T] = \frac{r_0^{-3}RQ_0}{4\pi\bar{c}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{y_j e^{-\gamma|\mathbf{y}|/\bar{c}}}{\mathbf{y}^3}\,a^2(\mathbf{x}-\mathbf{y},t;T)d\mathbf{y}\cdot(1+o(1))\,. \qquad (3.4.19)$$

Согласно основному положению нашей теории (см. разд. 3.1), функционал $a^2(\mathbf{x},t;T)$ в формуле в асимптотическом выражении (19) для $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ дается формулой (1.5). Тогда плотность потока тепла, связанного с его радиационным переносом, дается следующим выражением

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T] = K\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\,\exp\Big\{-\frac{\gamma}{\bar{c}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\Big\}I_0[\mathbf{y},t;T]d\mathbf{y}\,, \qquad (3.4.20)$$

где

$$I_0[\mathbf{y},t;T] \equiv a^2(\mathbf{y},t;T) = \hbar\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^3 f\Big(\frac{\hbar\omega}{\mathrm{k}\,T(\mathbf{y},t)}\Big)d\omega \qquad (3.4.21)$$

– введенная в гл. 1 удельная интенсивность излучения в пространственно-временнóй точке $\langle\mathbf{y},t\rangle$, функционально зависящая от мгновенного распределения температуры, k – постоянная Больцмана,

$$K = \frac{r_0^{-3}RQ_0}{4\pi\bar{c}^2}\,, \qquad R = \frac{4\pi\bar{c}^2}{\varepsilon}\,.$$

Эти формулы решают задачу, поставленную в разд. 3 в рамках нашей флуктуационной теории радиационной теплопереноса. В этих формулах K играет роль некоторой феноменологической постоянной, а функция $f(\cdot)$ представляет собой функцию распределения числа фотонов, излучаемых единицей объема диэлектрической среды, к которой применяется теория, при заданном значении локальной температуры в этом объеме.

Выражение для $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$, рассматриваемое как векторное поле на $\mathbb{R}^3$, является потенциальным полем, так как

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\,\exp\Big\{-\frac{\gamma}{\bar{c}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\Big\} = \nabla\Psi(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\,,$$

где

$$\Psi(r) = -\int\limits_r^{\infty}\exp\{-\gamma\eta/\bar{c}\}\frac{d\eta}{\eta^2}\,.$$

Так как с физической точки зрения ясно, что поток тепла не может иметь вихревой составляющей, то это заключение очень важно, так как оно является дополнительным качественным аргументом, подтверждающим правильность выбранного нами построения статистической теории радиационного теплопереноса,

Наконец, выпишем результирующее эволюционное уравнение для распределения температуры. С этой целью вычислим, исходя из формулы (20), дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$,

$$
\begin{gathered}
(\nabla, \boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]) = \\
= K \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big[\Big(\nabla, \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \Big) - \frac{\gamma}{\bar{c}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \Big] \exp\Big\{ -\frac{\gamma}{\bar{c}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \Big\} I_0[\mathbf{y}, t; T] d\mathbf{y} = \\
= K \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big[4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \frac{\gamma}{\bar{c}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \Big] \exp\Big\{ -\frac{\gamma}{\bar{c}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \Big\} I_0[\mathbf{y}, t; T] d\mathbf{y} = \\
= 4\pi K I_0[\mathbf{x}, t; T] - \frac{\gamma K}{\bar{c}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp\Big\{ -\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/\bar{c} \Big\}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} I_0[\mathbf{y}, t; T] d\mathbf{y} \,.
\end{gathered}
$$

Подставляя это выражение для дивергенции плотности потока теплового электромагнитного поля в уравнение (1.1), получаем окончательно общее уравнение теплопереноса в применении к тем физическим условиям, в рамках которых проводилось исследование в настоящей главе

$$
\begin{gathered}
\mathrm{c_v}(T)\dot{T}(\mathbf{x}, t) = \nabla_i \varkappa_{ij}(T) \nabla_j T(\mathbf{x}, t) + \\
+ K\Big(\gamma\bar{c}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp\Big\{ -\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/\bar{c} \Big\}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} I_0[\mathbf{y}, t; T] d\mathbf{y} - 4\pi I_0[\mathbf{x}, t; T] \Big) \,. \quad (3.4.22)
\end{gathered}
$$

Отметим, что полученный результат, совпадает, с точностью до феноменологических параметров, с той формулой для функционала $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$, которая была получена нами в первой главе (см. (1.4.10)), на основе модифицированных рассуждений теории теплопереноса излучением, основанных на представлениях геометрической оптики. Тем не менее, важность теории, развитой в настоящей главе, состоит в том, что формулы (20) и (21) дают выражение для плотности потока тепла, которое существенно отличается от того, которое получается на основе стандартной теории переноса тепла излучением для тех физических условий, в рамках которых был получен наш результат. Это отличие состоит в наличии веса $(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{-2}$ в интегральном ядре формулы (20). Появление этого веса связано с изотропным «рассеянием» излучения, испускаемого каждой пространственной точкой среды. Именно, благодаря развитой нами теории, стало понятно, каким образом нужно модифицировать стандартную теорию переноса излучения, чтобы получить физически правильное выражение для $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$.

3.5. Плотность потока энергии в одномерной геометрии

Этот раздел носит академический характер. Здесь мы рассчитаем поток энергии теплового электромагнитного поля на основе сформулированной в предыдущем разделе стохастической модели, но в рамках одномерной геометрии образца среды. Этот расчет очень поучителен, так как он показывает, что посредством сравнения его результатов с результатами следующей главы, важность учета весового множителя $l^{-2}[\mathbf{x},\mathbf{m};\mathbf{x}',\mathbf{m}']$ (см. гл. 1) в предложенной нами модификации стандартной теории переноса излучения в том случае, когда неоднородное распределение температуры в образце носит существенно трехмерный характер. Получаемый в этом разделе результат может иметь прикладное значение в том случае, когда образец среды представляет собой плоскопараллельную пластину достаточно большой протяженности так, чтобы ее можно было рассматривать как бесконечную. В этом случае динамика одномерного распределения температуры $T(x,t)$ в ней определяется одномерным уравнением теплопроводности

$$\mathrm{c_v}(T)\dot{T}(\mathbf{x},t) = (\varkappa(T)T')'(x,t) - S'[x,t;T])\,, \tag{3.5.1}$$

которое следует из (1.1). Здесь функционал $S[x,t;T]$ определяется математическим ожиданием $S[x,t;T] = \langle\!\langle\, \tilde{S}(x,t) \rangle\!\rangle$,

$$\tilde{S}(x,t) = \frac{c}{4\pi}[\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{H}}]_x(x,t)\,, \tag{3.5.2}$$

как это следует из (1.2). Электрическая и магнитная составляющие $\langle\tilde{\mathbf{E}}(x,t),\tilde{\mathbf{H}}(x,t)\rangle$ в этом выражении перпендикулярны направлению распространения электромагнитного поля вдоль оси x и определяются решениями уравнений (1.3). Плотность флуктуационного электрического тока $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t) = \sigma\tilde{\mathbf{E}}(x,t) + a(x,t;T)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x,t)$ также предполагается зависящей только одной координаты x, в которой, согласно (1.5), амплитуда определяется выражением

$$a^2(x,t;T)=\hbar\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^3 f\Big(\frac{\hbar\omega}{\mathrm{k}\,T(x,t)}\Big)d\omega\,, \tag{3.5.3}$$

а обобщенный гауссовский случайный процесс $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x,t)$ с нулевым средним значением имеет корреляционную функцию

$$K_{j_1,j_2}(x_1,t_1;x_2,t_2)=\delta_{j_1,j_2}K(|x_1-x_2|)\delta(t_1-t_2)\,. \tag{3.5.4}$$

3.5.1. Интегральное представление для плотности потока $S(x,t)$. В соответствии с одномерностью решаемой задачи, обобщенные пространственные фурье-образы случайных полей $\langle\tilde{\mathbf{E}}(k,t),\tilde{\mathbf{H}}(k,t)\rangle$, соответствующие стационарному случайному процессу (см. (2.1)), зависят только от одной, направленной вдоль оси x компоненты k волнового вектора,

$$\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}(k,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(k,\omega)e^{i\omega t}d\omega\,,\quad \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}(k,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(k,\omega)e^{i\omega t}d\omega\,. \tag{3.5.5}$$

То же самое касается пространственных фурье-образов стохастического источника (см. (2.2),(2.3))

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{j}}}(k,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\boldsymbol{\imath}}(k,\omega)e^{i\omega t}d\omega\,,\quad \tilde{\tilde{\rho}}(k,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varrho}(k,\omega)e^{i\omega t}d\omega\,, \tag{3.5.6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\imath}}(k,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\exp\big(-i\omega t-ik,x\big)a(x,t;T)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x,t)dxdt\,. \tag{3.5.7}$$

Соответственно, компоненты полных фурье-образов $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(k,\omega)$, $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(k,\omega)$ зависят только от параметров k и ω и определяются уравнениями (см. (2.4)-(2.7))

$$i\omega\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(k,\omega)\ +\gamma\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(k,\omega)+\frac{4\pi}{\varepsilon}\,\tilde{\boldsymbol{\imath}}(k,\omega)=\frac{ic}{\varepsilon}k[\mathbf{e}_x,\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(k,\omega)]\,, \tag{3.5.8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(k,\omega)\ =-\frac{c}{\mu\omega}k[\mathbf{e}_x,\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(k,\omega)]\,, \tag{3.5.9}$$

$$k\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_x(k,\omega))=-\frac{4\pi i}{\varepsilon}\,\tilde{\varrho}(k,\omega)\,,\quad \tilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_x(k,\omega))=0\,, \tag{3.5.10}$$

$$i\omega\tilde{\varrho}(k,\omega)+\gamma\tilde{\varrho}(k,\omega)+i\tilde{\boldsymbol{\imath}}_x(k,\omega)=0\,. \tag{3.5.11}$$

Из этих уравнений получаются следующие формулы (см. (2.8), (2.9)):

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(k,\omega) = i\frac{4\pi}{\varepsilon}\cdot\frac{\Big((\omega^2 - i\omega\gamma)\tilde{\boldsymbol{\iota}}(k,\omega) - \bar{c}^2(k,\tilde{\boldsymbol{\iota}}(k,\omega))k\mathbf{e}_x\Big)}{(\omega - i\gamma)(\omega^2 - \bar{c}^2k^2 - i\omega\gamma)}\,, \tag{3.5.12}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{H}}}(k,\omega) = -i\frac{4\pi c}{\varepsilon\mu}\cdot\frac{k[\mathbf{e}_x,\tilde{\boldsymbol{\iota}}(k,\omega)]}{(\omega^2 - \bar{c}^2k^2 - i\omega\gamma)}\,. \tag{3.5.13}$$

Подстановкой этих выражений в (2) получаем формулу для функции $S(x,t)$ (см. (2.10)),

$$S(x,t) = \frac{c}{4\pi}\langle\!\langle[\mathbf{E}(x,t),\mathbf{H}(x,t)]_x\rangle\!\rangle =$$

$$= \epsilon_{1ll'}\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\exp\Big[i(k-k')x + i(\omega-\omega')t\Big]\Big\langle\!\Big\langle\tilde{\mathcal{E}}_l(k,\omega)\tilde{\mathfrak{H}}^*_{l'}(k',\omega')\Big\rangle\!\Big\rangle dk dk' d\omega d\omega'\,. \tag{3.5.14}$$

Используя формулы (2.11), (2.12) для вычисления среднего, стоящего в правой части равенства, находим

$$\Big\langle\!\Big\langle\tilde{\mathcal{E}}_l(k,\omega)\tilde{\mathfrak{H}}^*_{l'}(k',\omega')\Big\rangle\!\Big\rangle =$$

$$-\frac{(4\pi)^2c}{\varepsilon^2\mu}\cdot\frac{\epsilon_{l'mm'}k'_m\Big(\omega(\omega-i\gamma)\delta_{ln} - \bar{c}^2k_lk_n\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2k^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2k'^2+i\omega'\gamma)}\,\langle\!\langle\tilde{\boldsymbol{\iota}}_n(k,\omega)\tilde{\boldsymbol{\iota}}^*_{m'}(k',\omega')\rangle\!\rangle.$$

$$\langle\!\langle\tilde{\boldsymbol{\iota}}_l(k,\omega)\tilde{\boldsymbol{\iota}}^*_{l'}(k',\omega')\rangle\!\rangle =$$

$$= \frac{\delta_{ll'}}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^3}a(y,s;T)a(y',s;T)K(|y-y'|)\times$$

$$\times\exp\Big[i\Big(k'y' - ky + s(\omega'-\omega)\Big)\Big]dydy'ds \equiv \delta_{l,l'}I(k,k';\omega'-\omega)\,. \tag{3.5.15}$$

$$S(x,t) = -R\int\limits_{\mathbb{R}^8}\exp\Big[i(k-k')x + i(\omega-\omega')t\Big]I(k,k';\omega'-\omega)\times$$

$$\times\frac{\delta_{n,m'}\epsilon_{1ll'}\epsilon_{l'1m'}k'\Big(\omega(\omega-i\gamma)\delta_{ln} - \bar{c}^2k_lk_n\Big)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2k^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2k'^2+i\omega'\gamma)}\,dkdk'd\omega d\omega'\,,$$

где $R = 4\pi\bar{c}^2/\varepsilon$. Преобразования в этой формуле в рамках тензорной алгебры приводят к следующей формуле:

$$S(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^4}\exp\Big[i(k-k')x+i(\omega-\omega')t\Big]I(k,k';\omega'-\omega)\times$$

$$\times \bar{R}(k,\omega;k',\omega')\,dkdk'd\omega d\omega'\,, \qquad (3.5.16)$$

где (см. (2.14))

$$\bar{R}(k,\omega;k',\omega') = -R\frac{2k'\omega}{(\omega^2-\bar{c}^2k^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2k'^2+i\omega'\gamma)}\,. \qquad (3.5.17)$$

В свою очередь, преобразование этого интегрального представления приводит к выражению (см. (2.15))

$$S(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} R(x-y,t-s;x-y',t-s)\times$$

$$\times K(|y-y'|)a(y,s;T)a(y',s;T)dydy'ds\,, \quad (3.5.18)$$

где интегральное ядро $R(y,s;y',s')$ определяется фурье-преобразованием (см. (2.16))

$$R(x,t;x',t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\bar{R}(k,\omega;k',\omega')\times$$

$$\times \exp\Big[i\big(kx-k'x'\big)+i(\omega t-\omega' t')\Big]dkdk'd\omega d\omega'\,. \qquad (3.5.19)$$

Выполнив преобразование в этом интегральном представлении, приходим к следующей формуле (см. (2.23)):

$$R(x,t;x',t') = -\frac{R}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\frac{2\omega k'}{(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)(\omega'^2-\bar{c}^2\mathbf{k}'^2+i\omega'\gamma)}\times$$

$$\times \exp\Big[i\big(kx-k'x'\big)+i(\omega t-\omega' t')\Big]dkdk'd\omega d\omega' =$$

$$= -2R\int_{\mathbb{R}^3}\dot{V}(x-y_1,t-s)V^{*\prime}(x-y_2,t-s)]\times$$

$$\times K(|y_1-y_2|)a(y_1,s;T)a(y_2,s;T)dy_1dy_2ds\,, \quad (3.5.20)$$

где обобщенная функция $V(x,t)$ дается интегральным представлением

$$V(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\exp(ikx+i\omega t)}{\omega^2-\bar{c}^2k^2-i\omega\gamma}\,dkd\omega\,. \qquad (3.5.21)$$

3.5.2. Асимптотика обобщенной функции $V(x,t)$. Преобразование интегрального представления (21), посредством вычисления вычетов в полюсах подинтегрального выражения в комплексной плоскости ω,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\exp(i\omega t)}{\omega^2 - \bar{c}^2 k^2 - i\omega\gamma}\, d\omega = i\pi e^{-\gamma t/2}\Big[\frac{\exp(i\omega(k)t)}{\omega(k)} - \frac{\exp(-i\omega(k)t)}{\omega(k)}\Big] =$$

$$= -\frac{2\pi}{\omega(k)} e^{-\gamma t/2} \sin(\omega(k)t)\,,$$

приводит к формуле, аналогичной (3.2),

$$V(x,t) = -e^{-\gamma t/2}\, \frac{\Theta(t)}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ikx} \frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}\, dk\,. \tag{3.5.22}$$

Так как основной вклад в асимптотику функции $V(x,t)$ при $\gamma \bar{L}/\bar{c} \to 0$ дает интеграл по полуоси $[\gamma/2\bar{c}, \infty]$ (см. п. 3.2), то вычисляя этот интеграл и переходя к пределу, находим асимптотическую формулу

$$V(x,t) \sim -\frac{\Theta(t)}{4\bar{c}} e^{-\gamma t/2}\Big(\mathrm{sgn}(x+\bar{c}t) - \mathrm{sgn}(x-\bar{c}t)\Big) \tag{3.5.23}$$

и, следовательно, при $t > 0$

$$\dot{V}(x,t) \sim -\frac{\gamma}{2} V(x,t) - \frac{\Theta(t)}{2} e^{-\gamma t/2}\Big(\delta(x+\bar{c}t) + \delta(x-\bar{c}t)\Big)\,. \tag{3.5.24}$$

3.5.3. Вычисление асимптотики функции $S(x,t)$. Для вычисления асимптотики функции $S(x,t)$ преобразуем сначала интегральное представление (20), перебросив производную по пространственной переменной на корреляционную функцию

$$S(x,t) = -2R \int\limits_{\mathbb{R}^3} V(x-y_2, t-s)\, \dot{V}(x-y_1, t-s) \times$$

$$\times \frac{d}{dy_2}\Big[K(|y_1-y_2|) a(y_1, s; T) a(y_2, s; T)\Big] dy_1 dy_2 ds\,.$$

Подстановка в это представление асимптотических выражений для (23), (24) с учетом пренебрежения пространственными производными амплитуды $a(x,t;T)$, ввиду их малости, приводит к следующей формуле:

$$S(x,t) = -\frac{R}{4\bar{c}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Theta(t-s) e^{-\gamma(t-s)/2} \Big(\mathrm{sgn}(x-y_2+\bar{c}t) - \mathrm{sgn}(x-y_2-\bar{c}t)\Big) \times$$

$$\times e^{-\gamma(t-s)/2}\Big(\delta(x-y_1+\bar{c}(t-s))+\delta(x-y_1-\bar{c}(t-s))\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{d}{dy_2}K(|y_1-y_2|)\Big]a(y_1,s;T)a(y_2,s;T)dy_1dy_2ds\,.$$

Теперь вычислим интеграл по s, используя δ-функцию,

$$S(x,t)=-\frac{R}{4\bar{c}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big[\frac{d}{dy_2}K(|y_1-y_2|)\Big]\times$$

$$\times\Big[\Theta(y_1-x)e^{-\gamma(y_1-x)/\bar{c}}\Big(\mathrm{sgn}(y_1-y_2)-\mathrm{sgn}(2x-y_2-y_1)\Big)\times$$

$$\times\, a(y_1,t+(x-y_1)/\bar{c};T)a(y_2,t+(x-y_1)/\bar{c};T)+$$

$$+\,\Theta(x-y_1)e^{-\gamma(x-y_1)/\bar{c}}\Big(\mathrm{sgn}(2x-y_1-y_2)-\mathrm{sgn}(y_1-y_2)\Big)\times$$

$$\times\, a(y_1,t-(x-y_1)/\bar{c};T)a(y_2,t-(x-y_1)/\bar{c};T)\Big]dy_1dy_2$$

После введения в явном виде зависимости от r_0 в подинтегральное выражение на основе формулы для корреляционной функции $K(r)=r_0^{-1}Q(r^2/2r_0^2)$ и замены переменных $x-y_1\Rightarrow y_1$, $x-y_2\Rightarrow y_2$ получаем

$$S(x,t)=-\frac{R}{4\bar{c}^2r_0}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{sgn}(y_1)e^{-\gamma|y_1|/\bar{c}}\Big[\frac{d}{dy_2}Q(|y_1-y_2|^2/2r_0^2)\Big]\times$$

$$\times\Big(\mathrm{sgn}(y_2-y_1)-\mathrm{sgn}(y_2+y_1)\Big)a(x-y_1,t-|y_1|/\bar{c};T)a(x-y_2,t-|y_1|/\bar{c};T)dy_1dy_2\,.$$

Перебрасывая производную по y_2 с учетом пренебрежения производной от $a(x-y_2,t-|y_1|/\bar{c};T)$, находим

$$S(x,t)=\frac{R}{2\bar{c}^2r_0}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{sgn}(y_1)e^{-\gamma|y_1|/\bar{c}}Q(|y_1-y_2|^2/2r_0^2)\times$$

$$\times\Big(\delta(y_2-y_1)-\delta(y_2+y_1)\Big)a(x-y_1,t-|y_1|/\bar{c};T)a(x-y_2,t-|y_1|/\bar{c};T)dy_1dy_2\,.$$

Теперь вычисление интеграла по y_2 на основе δ-функций дает

$$S(x,t)=\frac{R}{2\bar{c}^2r_0}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{sgn}(y)e^{-\gamma|y|/\bar{c}}\Big(Q(0)a^2(x-y,t-|y|/\bar{c};T)-$$

$$-Q(2|y|^2/r_0^2)a(x-y,t-|y|/\bar{c};T)a(x+y,t-|y|/\bar{c};T)\Big)dy\,.$$

Интеграл от второго слагаемого в подинтегральном выражении стремится к нулю при $r_0 \to 0$, в чем убеждаемся заменой в нем переменой интегрирования $y/r_0 \Rightarrow y_0$. В этом случае для этого интеграла получаем предельное значение

$$\lim_{r_0\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(y)e^{-\gamma r_0|y|/\bar{c}}Q(2y^2)a(x-r_0y,t-r_0|y|/\bar{c};T)a(x+r_0y,t-r_0|y|/\bar{c};T)dy$$

$$= a^2(x,t;T)\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(y)Q(2y^2)dy = 0\,.$$

Тогда главный член асимптотики функции $S(x,t)$ при $r_0 \to 0$ имеет вид

$$S(x,t) = \frac{RQ_0}{2\bar{c}^2 r_0}\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(y)e^{-\gamma|y|/\bar{c}}\,a^2(x-y,t-|y|/\bar{c};T)dy\,.$$

В этой формуле можно пренебречь сдвигом по времени в подинтегральном выражении ввиду его малости, так как $\gamma|y|/\bar{c} \sim \gamma\bar{L}/\bar{c} \ll 1$,

$$S(x,t) = \frac{RQ_0}{2\bar{c}^2 r_0}\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(y)e^{-\gamma|y|/\bar{c}}\,a^2(x-y,t;T)dy\,. \tag{3.5.25}$$

3.6. Выводы

В главе построена теория радиационного теплопереноса в диэлектрической твердотельной среде, полупрозрачной в красной и инфра-красной областях спектра электромагнитного излучения. Теория основана на статистическом описании флуктуаций электромагнитного поля, которые генерируются тепловыми флуктуациями составляющих среду частиц. Статистическое описание флуктуаций осуществляется посредством случайного стационарного во времени и стохастически однородного и стохастически изотропного гауссовского электромагнитного поля $\langle\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t),\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$ с нулевым средним значением, где поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)$ подчиняются стохастическим дифференциальным уравнениям Максвелла (1.3) с аддитивным шумом, в которых стохастическим источником является плотность $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t) = \sigma\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t) + a(\mathbf{x},t;T)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$ флуктуационного электрического тока в среде. Плотность $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x},t)$ состоит из двух частей: регулярной, подчиняющейся закону Ома с очень малой электропроводностью σ и, собственно, флуктуационной $a(\mathbf{x},t;T)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x},t)$, у которой амплитуда $a(\mathbf{x},t;T)$ является заданным функционалом от мгновенного распределения температуры $T(\mathbf{x}, t)$ в среде так, что $a^2(\mathbf{x}, t; T)$ определяется как средняя энергия фотонов (см. (4.21)), изучаемых единицей объема среды при заданной температуре $T(\mathbf{x}, t)$. При этом $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ – обобщенный гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением, у которого временна́я зависимость корреляционной функции $\langle\!\langle \varphi_{j_1}(\mathbf{x}_1, t_1)\varphi_{j_2}(\mathbf{x}_2, t_2)\rangle\!\rangle$ (см. (1.4)) имеет δ-функционный характер $\sim \delta(t_1 - t_2)$, а зависимость корреляционной функции от пространственных переменных локализована в малой окрестности нуля с линейным размером порядка $r_0 \approx 10^{-6}$см.

В рамках построенной теории вычислена плотность потока тепла $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$, переносимого тепловым электромагнитным полем, в условиях большой нагретости среды до температур, сравнимых с температурой ее плавления, и при наличии больших перепадов температур в ней порядка сотен градусов на единицу длины. Эта плотность дается формулами (4.20), (4.21). Показано, что полученное выражение для плотности $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ потока энергии:

1) совпадает с выражением, полученным для этой величины на основе модифицированной теории переноса излучения в среде, развитой в гл. 1;

2) существенно зависит от геометрической формы образца среды и характера неоднородного распределения температуры в ней;

3) не содержит вихревой составляющей, что согласуется с физическими представлениями о векторном поле, описывающем плотность потока тепла в среде.

На основе вычисленной плотности потока энергии электромагнитного поля, порождаемого тепловыми флуктуациями среды, получено общее уравнение переноса тепла в диэлектрической полупрозрачной среде с учетом радиационного теплопереноса.

Глава 4. Гауссовские стохастические электромагнитные поля

В настоящей главе изучаются гауссовские модели общего вида, которые описывают стохастическое электромагнитное поле с нулевым средним значением. Их конструкция осуществляется в рамках общепринятого в статистической физике подхода, основанного на разложения поля на плоские линейно поляризованные волны в конечной области с большим линейным размером и последующим переходом к т.н. термодинамическому пределу. Показывается, что математически непротиворечивым образом могут быть построены модели электромагнитного поля с произвольной корреляционной функцией, если на нее наложено специальное дополнительное условие, связанное с поперечностью электромагнитного поля. Материал этой главы основан на работах [Л1]-[Л12] диссертанта и, в значительной степени, он связан с ответом на вопросы, поставленные в работах [84]-[87].

Рассмотрим стохастическое электромагнитное поле $\langle \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}} \rangle$ в евклидовом пространстве, которое подчиняется уравнениям Максвелла

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} + [\nabla, \tilde{\mathbf{E}}] = 0\,, \qquad (\nabla, \tilde{\mathbf{H}}) = 0\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} - [\nabla, \tilde{\mathbf{H}}] = 0\,, \qquad (\nabla, \tilde{\mathbf{E}}) = 0\,.$$

Далее удобно использовать формализм, при котором для описания электромагнитного поля используется только одна случайная комплекснозначная вектор-функция $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{E}} + i\tilde{\mathbf{H}}$, которая подчинена уравнениям

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial t} = -i[\nabla, \tilde{\mathbf{F}}]\,, \qquad (\nabla, \tilde{\mathbf{F}}) = 0\,. \tag{4.1}$$

Для определения стохастического поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ мы будем исходить из следующей схемы, принятой в статистической физике и квантовой теории поля. Сначала мы построим случайное электромагнитное поле в конечной области Λ, которую, ввиду простоты, положим в виде кубического ящика со стороной L, $\Lambda = [0, L]^3$. Затем, при вычислении математических ожиданий, интерпретируемых как наблюдаемые значения физических величин, будем переходить к пределу $L \to \infty$, который называется *термодинамическим пределом.* Иными словами, наша модель стохастического электромагнитного поля представляет собой обобщенное случайное поле, так как мы, посредством предельного перехода, определяется только лишь характеристический функционал случайного поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ в $\mathbb{R}^3$.

В рассматриваемой нами схеме случайное поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ в Λ может быть разложено в трехмерный ряд Фурье,

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}} \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\kappa}, t) \exp\big(i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})\big)\,, \tag{4.2}$$

где $\bar{\Lambda} = \left\langle \boldsymbol{\kappa} = \frac{2\pi}{L} n_i \mathbf{e}_i : n_j \in \mathbb{Z}, j = 1,2,3 \right\rangle$, $\mathbf{e}_j$, $j = 1,2,3$ — орты в $\mathbb{R}^3$, ориентированные по сторонам куба Λ. Траектории векторного случайного процесса $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ подчинены уравнениям

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}}{\partial t} = [\boldsymbol{\kappa}, \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}]\,, \qquad (\boldsymbol{\kappa}, \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}) = 0\,. \tag{4.3}$$

Задание случайной комплекснозначной вектор-функции $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$, удовлетворяющей (3), эквивалентно заданию случайного поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющего уравнениям (1).

Набор случайных коэффициентов $\tilde{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, $i = 1,2,3$, как набор коэффициентов ряда Фурье квадратично интегрируемой функции $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$, квадратично суммируем

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\bar{\Lambda}}} |\tilde{\tilde{F}}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty\,,$$

$$\tilde{\tilde{F}}_j(\boldsymbol{\kappa}, t) = \frac{1}{|\Lambda|} \int\limits_{\Lambda} \tilde{F}_j(\mathbf{x}, t) \exp(-i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa})) d\mathbf{x}\,,$$

$|\Lambda|$ — объем области Λ. Более того, ввиду гладкости поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ (квадратичной интегрируемости пространственных производных поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$), имеет место более сильное свойство суммируемости этого набора коэффициентов,

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa} \in \tilde{\bar{\Lambda}}} \boldsymbol{\kappa}^2 |\tilde{\tilde{F}}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2 < \infty\,.$$

Простейшая стохастическая модель, у которой случайные реализации могут быть представлены с вероятностью единица в виде обычных (не обобщенных) гладких вектор-функций, удовлетворяющих уравнению (1), дается конструкцией гауссовского случайного поля. Более того, модель гауссовского случайного поля является естественной в том случае, когда оно мало с физической точки зрения. Математически, эту малость нужно понимать в смысле малости средних квадратичных значений поля.

Гауссовская модель электромагнитного поля, естественным образом, определяется на основе понятия характеристического функционала. В общем случае, распределение вероятностей пары, вообще говоря статистически связанных, случайных полей $\langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)\rangle$ (в том числе и обобщенных) определяется на основе характеристического функционала

$$\Phi[\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle; \langle \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{y},s)\rangle] \equiv$$

$$\equiv \left\langle\!\!\left\langle \exp\Big(i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big(v_j(\mathbf{x},t)\tilde{E}_j(\mathbf{x},t) + w_j(\mathbf{x},t)\tilde{H}_j(\mathbf{x},t)\big)d\mathbf{x}\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle$$

от пары $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x},t), \mathbf{w}(\mathbf{x},t)\rangle$ финитных и непрерывных вектор-функций на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$. Здесь мы использовали обозначение $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle$ для операции вычисления математического ожидания по определяемому распределению вероятностей.

Гауссовская модель определяется следующей явной формулой для характеристического функционала

$$\Phi[\mathbf{u}^{(\alpha)}; \tilde{\mathbf{F}}^{(\beta)}(\mathbf{x},t)] = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^6} K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},s)u_i^{(\alpha)}(\mathbf{x},t)u_j^{(\beta)}(\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

$$+ i\int\limits_{\mathbb{R}} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j^{(\alpha)}(\mathbf{x},t)\langle\!\langle \tilde{F}_j^{(\alpha)}(\mathbf{x},t)\rangle\!\rangle d\mathbf{x}\Big),$$

где $\alpha,\beta = 1,2$ и введены обозначения $u_j^{(1)} = v_j$, $u^{(2)} = w_j$; $\tilde{F}_j^{(1)} = \tilde{E}_j$, $\tilde{F}_j^{(2)} = \tilde{H}_j$ и корреляционная функция

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},s) = \langle\!\langle (\tilde{F}_i^{(\alpha)}(\mathbf{x},t) - \langle\!\langle \tilde{F}_i^{(\alpha)}(\mathbf{x},t)\rangle\!\rangle)(\tilde{F}_j^{(\beta)}(\mathbf{y},s) - \langle\!\langle \tilde{F}_j^{(\beta)}(\mathbf{y},s)\rangle\!\rangle)\rangle\!\rangle .$$

В рамках гауссовской модели все средние следующего вида $\left\langle\!\!\left\langle \Big(\prod\limits_{k=1}^{m} \tilde{F}_{i_k}(\mathbf{x}_k,t_k)\Big)\Big(\prod\limits_{l=1}^{m} \tilde{F}_{j_l}^{*}(\mathbf{y}_l,s_l)\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle$ конечны.

Пусть гауссовское векторное комплекснозначное поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)$ обладает нулевым средним, $\langle\!\langle \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)\rangle\!\rangle = 0$. Более того, будем, далее, для простоты предполагать, что его электрическая и магнитная компоненты являются стохастически независимыми и эквивалентными. Это означает, в частности, что

$$\langle\!\langle \tilde{E}_i(\mathbf{x},t)\tilde{H}_j(\mathbf{y},s)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tilde{E}_i(\mathbf{x},t)\rangle\!\rangle\langle\!\langle \tilde{H}_j(\mathbf{y},s)\rangle\!\rangle = 0\,,$$

а также $\langle\!\langle \tilde{E}_i(\mathbf{x},t)\tilde{E}_j(\mathbf{y},s)\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tilde{H}_i(\mathbf{x},t)\tilde{H}_j(\mathbf{y},s)\rangle\!\rangle \equiv K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)/2$, при любых значениях $\mathbf{x},t,i$ и $\mathbf{y},s,j$. Тогда любые математические ожидания от произведений значений поля $\langle\!\langle \Big(\prod\limits_{k=1}^{m}\tilde{F}_{i_k}(\mathbf{x}_k,t_k)\Big)\Big(\prod\limits_{l=1}^{n}\tilde{F}^*_{j_l}(\mathbf{y}_l,s_l)\Big)\rangle\!\rangle$, во-первых, отличны от нуля только в случае, если $m=n$, и, во-вторых, если это равенство имеет место, то они выражаются через корреляционную функцию

$$K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s) = \langle\!\langle \tilde{F}_i(\mathbf{x},t)\tilde{F}^*_j(\mathbf{y},s)\rangle\!\rangle. \tag{4.4}$$

посредством следующей формулы:

$$\left\langle\!\!\left\langle \Big(\prod_{k=1}^{m}\tilde{F}_{i_k}(\mathbf{x}_k),t_k\Big)\Big(\prod_{l=1}^{m}\tilde{F}^*_{j_l}(\mathbf{y}_l,s_l)\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle = \sum_{\mathsf{P}\in\mathcal{P}_m}\prod_{k=1}^{m}\langle\!\langle \tilde{F}_{i_k}(\mathbf{x}_k,t_k)\tilde{F}^*_{j_{\mathsf{P}k}}(\mathbf{y}_{j_{\mathsf{P}k}},s_{j_{\mathsf{P}k}})\rangle\!\rangle. \tag{4.5}$$

Здесь суммирование производится по всем возможным перестановкам P номеров аргументов, которые составляют группу перестановок $\mathcal{P}_m$ порядка m.

Заметим, что корреляционная функция (4) в рассматриваемом нами случае является вещественнозначной, в чем убеждаемся непосредственной подстановкой разложения $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{E}} + i\tilde{\mathbf{H}}$ в ее определение. Принимая во внимание вещественность этой функции, из (4) следует, что она обладает следующим свойством

$$K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s) = K_{ji}(\mathbf{y},s;\mathbf{x},t)\,. \tag{4.6}$$

Запишем определение характеристического функционала в терминах случайной вектор-функции $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{E}} + i\tilde{\mathbf{H}}$:

$$\Phi[\mathbf{u};\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)] = \left\langle\!\!\left\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\int\limits_{\mathbb{R}^3}u^*_j(\mathbf{x},t)\tilde{F}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}+i\mathbf{w}$. Подставляя же правую часть определения характеристического функционала гауссовской модели, согласно свойствам статистической независимости и эквивалентности полей $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ и равенства нулю средних компонент $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, выражение $K^{(\alpha,\beta)}_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s) = K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)\delta_{\alpha,\beta}$, находим

$$\Phi[\mathbf{u};\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)] \equiv \left\langle\!\!\left\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\int\limits_{\mathbb{R}^3}u^*_j(\mathbf{x},t)\tilde{F}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\Big) \quad (4.7)$$

для любой непрерывной комплекснозначной финитной вектор-функции $u_i(\mathbf{x},t)$. Следовательно, комплекснозначная тензор-функция $K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)$ полностью определяет, в рассматриваемом нами случае, распределение вероятностей комплекснозначного векторного гауссовского случайного поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)$.

Каждая из формулы (5) и (6) может служить характеристическим свойством случайного поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)$ со статистически независимыми и эквивалентными компонентами, обладающими нулевыми средними значениями, то есть справедливо утверждение

Для того, чтобы гауссовское комплекснозначное векторное поле $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{E}} + i\tilde{\mathbf{H}}$, у которого компоненты $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ имеют нулевые средние значения, обладало свойством их статистической независимости и эквивалентности, необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция (4), обладающая свойством (6), была вещественной и имела место формула усреднения (5) или, эквивалентно, формула (7) для характеристического функционала.

Необходимость. Следует из приведенного выше рассуждения.

Достаточность. Пусть имеет место формула (7). Тогда, одновременной заменой переменных интегрирования суммирования $\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}$, $t \Leftrightarrow s$, $i \Leftrightarrow j$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big(v_i(\mathbf{x},t)w_j(\mathbf{y},s) - w_i(\mathbf{x},t)v_j(\mathbf{y},s)\big)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y} = 0\,,$$

то есть

$$\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y} = 0\,.$$

Тогда,

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\Big) =$$

$$= \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\Big) =$$

$$= \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\Big)\Big|_{w=0} \times$$

$$\times \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x},t)u_j^*(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\Big)\Big|_{v=0} =$$

$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)\tilde{F}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\Big\rangle\!\!\Big\rangle\Big|_{w=0} \times$$

$$\times \Big\langle\!\!\Big\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)\tilde{F}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\Big\rangle\!\!\Big\rangle\Big|_{v=0} =$$

$$= \Big\langle\!\!\Big\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)\tilde{E}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\Big\rangle\!\!\Big\rangle \times$$

$$\times \Big\langle\!\!\Big\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j^*(\mathbf{x},t)(i\tilde{H}_j)(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\Big\rangle\!\!\Big\rangle,$$

согласно формуле (7), соответственно, при $w \equiv 0$, $v \equiv 0$. С другой стороны, используя формулу (7) в общем случае, имеем

$$\Phi[\mathbf{u};\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)] = \Phi[\mathbf{u};\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)]\cdot\Phi[\mathbf{u};i\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)]\,.$$

Эта равенство означает, что случайные поля $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)$ статистически независимы.

Положим теперь в начальном и конечном выражениях приведенного вычисления $v = w$. Тогда левая часть равна

$$\left[\exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_i(\mathbf{x},t)v_j(\mathbf{y},s)K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y}\Big)\Big|_{w=0}\right]^2 =$$

$$= \left[\Big\langle\!\!\Big\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)E_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\Big\rangle\!\!\Big\rangle\right]^2,$$

а правая –

$$\left\langle\!\!\left\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)\tilde{E}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle \times$$

$$\times \left\langle\!\!\left\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)\tilde{H}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle .$$

Это приводит к равенству

$$\left\langle\!\!\left\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)\tilde{E}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \exp\Big(i\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_j(\mathbf{x},t)\tilde{H}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big)\right\rangle\!\!\right\rangle$$

с произвольной функцией $v(\mathbf{x},t)$, которое означает, что поля $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$ стохастически эквивалентны.

Наконец, вычисляя вариационную производную

$$\delta^{m+n}(\cdot)/\delta u_{i_1}(\mathbf{x}_1,t_1)...\delta u_{i_m}(\mathbf{x}_m,t_m)\delta u^*_{j_1}(\mathbf{y}_1,s_1)...\delta u^*_{j_n}(\mathbf{y}_n,s_n)$$

от обеих частей формулы (7) в точке $u_i(\mathbf{x},t) \equiv 0$ функционального пространства финитных непрерывных вектор-функций $u_i(\mathbf{x},t)$, получим формулу (5) для вычисления средних значений мономов от случайного поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)$.

Из определения (4) непосредственно следует, что корреляционная функция, обладает следующим свойством положительности:

$$\left\langle\!\!\left\langle \Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_j(\mathbf{x},t)\tilde{F}_j(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}\Big|^2\right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dtds \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{ij}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},s)u_i(\mathbf{x},t)u^*_j(\mathbf{y},s)d\mathbf{x}d\mathbf{y} \ge 0\,, \qquad (4.8)$$

верное для любой непрерывной финитной комплекснозначной вектор-функции $u_i(\mathbf{x},t)$ (это, автоматически, означает вещественность интеграла в правой части).

Замечание. Воспользовавшись теоремой Бохнера-Хинчина (см., например, [66]), легко доказать, что это условие, вместе с (6), является также достаточным для того, чтобы функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)$ представляла корреляционную функцию некоторого комплекснозначного векторного случайного поля $\tilde{F}_j(\mathbf{x}, t)$ с нулевым средним значением. Если эта функция вещественна, то, согласно доказанной теореме, реальная и мнимая части случайного поля статистически независимы и эквивалентны. Для доказательства достаточно определить пару гауссовских вектор-функций $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$ таких, что $\langle\!\langle \tilde{E}_j \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tilde{H}_j \rangle\!\rangle = 0$ и, для которых $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)\delta_{\alpha,\beta}$.

Заметим, что свойства (6), (8) означают, что $K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)$ является ядром эрмитовского неотрицательного интегрального оператора с вещественным ядром.

Укажем, наконец, очень важный частный случай, который имеет особое значение в связи с приложением в теории термодинамически равновесного излучения в замкнутой полости. Случайное поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ называется стохастически однородным по пространству и/или стационарным по времени, если его распределение вероятностей не изменяется при преобразовании случайного поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ посредством сдвига пространственной точки $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{a}$ и/или времени $t \Rightarrow t+c$ для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ и/или любого числа $c \in \mathbb{R}$. Иными словами, случайное поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}+\mathbf{a}, t)$ и/или $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t+c)$ имеет то же самое распределение вероятностей, что и поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$. Согласно формуле (7), для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$K_{ij}(\mathbf{x}+\mathbf{a}, t; \mathbf{y}+\mathbf{a}, s) = K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) \text{и/или} K_{ij}(\mathbf{x}, t+c; \mathbf{y}, s+c) = K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s). \tag{4.9}$$

Общим решением функциональных уравнений (9) при наличии стохастической однородности, как по пространственным переменным, так и по времени, является следующий вид корреляционной функции:

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = K_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s)\,, \tag{4.10}$$

где $K_{ij}(\cdot,\cdot)$ – некоторая тензор-функция на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, то есть функция уже только от одной пространственно-временной точки. При этом, согласно (6), функция $K_{ij}(\cdot,\cdot)$ обладает свойством

$$K_{ij}(\mathbf{x}, t) = K_{ji}(-\mathbf{x}, -t)\,. \tag{4.11}$$

Выясним теперь какими дополнительными необходимыми свойствами должна обладать функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, s)$ для того, чтобы она представляла корреляционную функцию случайного поля $\tilde{F}_j(\mathbf{x}, t)$, соответствующую электромагнитному полю $\langle \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}} \rangle$ посредством соотношения $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{E}} + i\tilde{\mathbf{H}}$. Так как в этом случае случайная функция должна подчиняться уравнениям Максвелла, записанным в форме (1), то умножая каждое из этих уравнений на $\tilde{F}^*_j(\mathbf{y}, s)$ и производя усреднение, находим, что корреляционная функция (4) должна подчиняться следующим уравнениям

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = -i\epsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k} K_{lj}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = 0\,. \quad (4.12)$$

Точно также, заменив в уравнениях (1) $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y}$ и $t \Rightarrow s$ вместе с комплексным сопряжением, а затем умножив из на $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, t)$ и усреднив по распределению вероятностей поля, получим, что имеют место уравнения

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial s} K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = i\epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial y_k} K_{il}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)\,, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s) = 0\,. \quad (4.13)$$

Существенно, что эти уравнения имеют место только в случае, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $t \neq s$. Но при этом также нужно помнить, что поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ должно быть дифференцируемым по $\mathbf{x}$ и t, и поэтому корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$ обязательно дифференцируема по каждой из переменных, то есть, наверняка, непрерывна.

Ограничения (12), (13) на корреляционную функцию являются необходимыми в том случае, когда поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако, они не являются достаточными. Это связано с тем, что они получены уже в результате усреднения, в то время как случайное электромагнитное поле $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла с вероятностью единица. Таким образом, при усреднении посредством описания его корреляционной функцией, удовлетворяющей уравнениям (12), (13), теряется существенная часть информации о случайном поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$. Нахождение таких ограничений на корреляционную функцию $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, которые бы являлись необходимыми и достаточными для того, чтобы она соответствовала стохастическому электромагнитному полю, в общем случае, довольно затруднительно. Далее эта задача будет решена в том случае, когда электромагнитное поле сосредоточено в ограниченной полости.

Рассмотрим стохастическое электромагнитное поле в Λ. Для нахождения ограничений на корреляционную функцию $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, которые представляют необходимые и достаточные условия ее связанности со стохастическим электромагнитным полем, воспользуемся разложением (2) поля

$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$. Запишем уравнения (3) в следующей форме:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\tilde{F}}_i}{\partial t} = \epsilon_{ijk}\kappa_j \bar{F}_k\,, \qquad \kappa_j \bar{\tilde{F}}_j = 0\,; \quad \boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}\,. \tag{4.14}$$

Ввиду наличия однозначной линейной связи между полями $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ и $\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$, для того чтобы поле $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, t)$ было гауссовским и имело нулевое среднее значение необходимо и достаточно чтобы поле $\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ также было гауссовским и имело нулевое среднее. В этом случае поле $\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ полностью определяется ковариационной матрицей

$$\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \langle\!\langle \bar{\tilde{F}}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1)\bar{\tilde{F}}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2)\rangle\!\rangle\,,$$
$$\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \bar{K}^*_{i_2 i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2; \boldsymbol{\kappa}_1, t_1)\,.$$

Эта матрица обладает обладает свойством положительной определенности вида

$$\left\langle\!\!\left\langle \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}} \bar{u}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)\bar{\tilde{F}}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)\Big|^2 \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{K}_{k_1 k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)\bar{u}_{k_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1)\bar{u}^*_{k_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2)dt_1 dt_2 \geq 0\,. \tag{4.15}$$

для любого набора финитных по t функций $\bar{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$.

Корреляционная функция $K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2)$ поля $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, t)$ связана с ковариационной матрицей $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ следующей формулой

$$K_{i_1 i_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} \bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)\exp[i(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) - i(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)]\,,$$

которая получается подстановкой в определяющую формулу (4), вместо случайных функций $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$, их разложений (2). Подставляя аналогичное разложение в выражение в правой части формулы (10), убеждаемся, что, благодаря неравенству (15), корреляционная функция $K_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, s)$, действительно, является положительно определенной.

Как и для поля $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, t)$, для того чтобы $\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ обладало стохастически независимыми и эквивалентными реальной и мнимой частями, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$, как и корреляционная матрица $K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s)$, была вещественной, то есть удовлетворяла соотношению

$$\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)=\bar{K}_{i_2i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2,t_2;\boldsymbol{\kappa}_1,t_1)\,. \tag{4.16}$$

Найдем общее решение второго уравнения в (14), которое является алгебраическим. Для этого заметим, что вырожденное линейное уравнение

$$\tilde{\bar{\bar{F}}}_i(\boldsymbol{\kappa},t)=\epsilon_{ijk}\kappa_j\tilde{A}_k(\boldsymbol{\kappa},t)\,, \tag{4.17}$$

где ϵ_{ijk} — псевдотензор Леви-Чивитта, всегда разрешимо относительно $\tilde{A}_k(\boldsymbol{\kappa},t)$ при выполнении условия $\kappa_j\tilde{\bar{\bar{F}}}_j=0$. Общим решением этого линейного уравнения является (если $\boldsymbol{\kappa}\neq 0$)

$$\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t)=\lambda(\boldsymbol{\kappa},t)\kappa_i-\boldsymbol{\kappa}^{-2}\epsilon_{ijk}\kappa_j\tilde{\bar{\bar{F}}}_k(\boldsymbol{\kappa},t)\,,$$

$\lambda(\boldsymbol{\kappa},t)$ – произвольная функция от $\boldsymbol{\kappa}$ и t. Однако, первое слагаемое не дает вклада в правой части формулы (17), и поэтому оно может быть положено равным нулю. Тогда для выполнимости (17), достаточно считать, что набор функций $\tilde{A}_k(\boldsymbol{\kappa},t)$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$ однозначно определяется формулой

$$\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t)=-\boldsymbol{\kappa}^{-2}\epsilon_{ijk}\kappa_j\tilde{\bar{\bar{F}}}_k(\boldsymbol{\kappa},t)\,. \tag{4.18}$$

Ввиду квадратичной суммируемости $\tilde{F}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, этот набор функций обладает свойством

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}}\boldsymbol{\kappa}^2|\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa},t)|^2<\infty\,.$$

Ввиду однозначности связи между полями $\tilde{\bar{\bar{F}}}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$ и $\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$, совместное распределение вероятностей набора $\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$ порождается распределением вероятностей набора $\tilde{\bar{\bar{F}}}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$ и, обратно, распределение вероятностей первого набора порождает совместное распределение второго. При этом, в силу выполнимости свойства суммируемости с квадратичным весом для набора $\tilde{\bar{\bar{F}}}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$ с вероятностью единица, для набора $\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, , $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$, с той же вероятностью, выполняется

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}}\boldsymbol{\kappa}^4|\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t)|^2<\infty\,. \tag{4.19}$$

Кроме того, так как набор случайных функций $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa},t)$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$ (случайное поле на $\langle\bar{\Lambda},\mathbb{R}\rangle$) получается линейным преобразованием из гауссовского набора случайных функций $\tilde{\bar{\bar{F}}}(\boldsymbol{\kappa},t)$, то он также является гауссовским [64].

Поле $\tilde{A}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)$, вслед за случайным полем $\bar{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$, обладает нулевым средним значением. Обратно, если для набора гауссовских случайных функций $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ с нулевым средним значением выполняется (19), то соответствующий набор функций $\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ представляет собой гауссовское поле с нулевым средним, квадратично суммируемое с весом $\boldsymbol{\kappa}^2$.

Поле $\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ с нулевым средним значением полностью описывается бесконечной ковариационной матрицей

$$D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \langle\!\langle \tilde{A}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) \tilde{A}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \rangle\!\rangle ,$$

$$D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = D^*_{i_2,i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2; \boldsymbol{\kappa}_1, t_1) . \tag{4.20}$$

Эта матрица точно также как и ковариационная матрица $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ должна обладать свойством положительной определенности

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \bar{\Lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \bar{u}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) \bar{u}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) dt_1 dt_2 \geq 0 \tag{4.21}$$

для любого набора финитных по t функций $\bar{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$. Подставляя в эту формулу выражения (17) для функций $\tilde{A}_{i_s}(\boldsymbol{\kappa}_s, t_s)$, $\boldsymbol{\kappa}_s \in \bar{\Lambda}$ и заменив функции $\bar{u}_{i_s}(\boldsymbol{\kappa}_s, t_s)$ на $-\boldsymbol{\kappa}_s^{-2} \epsilon_{i_s j k_s} \kappa_j \bar{u}_{k_s}(\boldsymbol{\kappa}_s, t_s)$, $s = 1, 2$, получим, что выполняется (15).

Итак, вследствие выявленных выше связей между полями $\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ и $\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ и вещественности коэффициентов (формулы (17) и (18)), в линейных связях между этими полями, справедливо утверждение

Для того чтобы комплекснозначное гауссовское поле $\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ имело нулевое среднее значение и статистически независимые и эквивалентные реальную и мнимую части необходимо и достаточно, чтобы гауссовское векторное комплекснозначное поле $\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ имело нулевое среднее и корреляционная матрица этого поля $\langle\!\langle \tilde{A}_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1) \tilde{A}^*_{i_2}(\boldsymbol{\kappa}_2, t_2) \rangle\!\rangle$ была вещественной.

Таким образом, определив произвольным образом набор гауссовских случайных функций $\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, $\boldsymbol{\kappa} \in \bar{\Lambda}$ с нулевым средним и с реализациями, удовлетворяющими с вероятностью единица условию (19) и вещественной ковариационной матрицей $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$, мы, тем самым, определим однозначным образом гауссовское случайное соленоидальное поле $\tilde{F}_i(\mathbf{x}, t)$ с вещественной ковариационной матрицей. При этом, ввиду формулы (13), ковариационные матрицы $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ и $D_{i_1,i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ связаны очевидным соотношением

$$\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \epsilon_{i_1 j_1 k_1} \epsilon_{i_2 j_2 k_2} \kappa_{j_1} \kappa_{j_2} D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) , \tag{4.22}$$

$$\sum_{\kappa_{j_1},\kappa_{j_2}} \boldsymbol{\kappa}_1^2\boldsymbol{\kappa}_2^2||D(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)||^2 < \infty\,,$$

которое является необходимым (в рамках сделанных ограничений на поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)$) и достаточным условием для соленоидальности этого поля так, что имеют место соотношения

$$(\boldsymbol{\kappa_1})_{i_1}\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2) = 0\,, \qquad (\boldsymbol{\kappa_2})_{i_2}\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2) = 0\,.$$ [12)]

Рассмотрим теперь те ограничения на выбор гауссовского поля $A_i(\boldsymbol{\kappa},t)$, которые необходимы для того, чтобы поле $\tilde{\bar{F}}_i(\boldsymbol{\kappa},t)$ с вероятностью 1 удовлетворяло эволюционному уравнению (1).

Продифференцируем по времени формулу (17) и воспользуемся вторым уравнением (14). Тогда, так как $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, то

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\tilde{\bar{F}}_i}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\kappa}^2\tilde{\bar{F}}_i\,.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t) = -\boldsymbol{\kappa}^2\Big(-\boldsymbol{\kappa}^{-2}\epsilon_{ijk}\kappa_j\tilde{F}_k(\boldsymbol{\kappa},t)\Big) = -\boldsymbol{\kappa}^2\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t)\,.$$

Поэтому

$$\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa},t) = \tilde{A}_i^{(+)}(\boldsymbol{\kappa})\exp(ic|\boldsymbol{\kappa}|t) + \tilde{A}_i^{(-)}(\boldsymbol{\kappa})\exp(-ic|\boldsymbol{\kappa}|t)\,.$$

Тогда, подставляя аналогичные выражения в определение ковариационная матрицы, получаем

$$\begin{aligned} D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2) &= \\ = \langle\!\langle \tilde{A}_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{A}_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\!\rangle \exp\big(ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1 - |\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)\big) &+ \\ + \langle\!\langle \tilde{A}_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{A}_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\!\rangle \exp\big(-ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1 - |\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)\big) &+ \\ + \langle\!\langle \tilde{A}_{j_1}^{(+)}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{A}_{j_2}^{(-)*}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\!\rangle \exp\big(ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1 + |\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)\big) &+ \\ + \langle\!\langle \tilde{A}_{j_1}^{(-)}(\boldsymbol{\kappa}_1)\tilde{A}_{j_2}^{(+)*}(\boldsymbol{\kappa}_2)\rangle\!\rangle \exp\big(-ic(|\boldsymbol{\kappa}_1|t_1 + |\boldsymbol{\kappa}_2|t_2)\big)&\,. \end{aligned}$$

---

[12] С другой стороны, выполнимость этих соотношений обеспечивает соленоидальность поля $F_i(\mathbf{x},t)$ с вероятностью 1, так как имеет место

$$0 = \sum_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2\in\bar{\Lambda}}(\boldsymbol{\kappa}_1)_{i_1}(\boldsymbol{\kappa}_2)_{i_2}\bar{K}_{k_1k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t;\boldsymbol{\kappa}_2,t)\bar{u}(\boldsymbol{\kappa}_1)\bar{u}^*(\boldsymbol{\kappa}_2) = \Big\langle\!\!\Big\langle\Big|\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}}\bar{u}(\boldsymbol{\kappa})\kappa_j\bar{F}_j(\boldsymbol{\kappa},t)\Big|^2\Big\rangle\!\!\Big\rangle\,,$$

для любой финитной функции $\bar{u}(\boldsymbol{\kappa})$, для всех $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$. Это означает, что с вероятностью единица имеет место тождество $\kappa_k\bar{F}_k(\boldsymbol{\kappa},t) = 0$, $\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}$ (см. (13)).

Далее, ограничимся анализом случая стохастически пространственно-однородного случайного поля. В этом случае, при наличии периодических граничных условий, ковариационная матрица пропорциональна символу Кронекера $\delta_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2}$. Поэтому мы введем обозначение $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \delta_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}} \delta_{\boldsymbol{\kappa}_2,\boldsymbol{\kappa}} D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$. Введя матрицы $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\!\langle \tilde{A}^{(+)}_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}^{(+)*}_{j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\!\rangle$ и $D'_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\!\langle \tilde{A}^{(+)}_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}^{(-)*}_{j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\!\rangle$, из требования вещественности матрицы $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$ при любых значениях t_1, t_2 находим, что $D^*_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\!\langle \tilde{A}^{(-)}_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}^{(-)*}_{j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\!\rangle$ и ${D'_{j_1,j_2}}^*(\boldsymbol{\kappa}) = \langle\!\langle \tilde{A}^{(-)}_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}^{(+)*}_{j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\!\rangle$. Тогда явное выражение для матрицы $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$ запишется в виде

$$D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2) = D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)\big) + D^*_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)\big) +$$
$$+ D'_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 + t_2)\big) + {D'_{j_1,j_2}}^*(\boldsymbol{\kappa}) \exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 + t_2)\big)\,.$$

Такая матрица полностью определяет гауссовские случайные поля $\tilde{A}^{(\pm)}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$ и, тем самым, поле $\tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, так как из выполнимости $\langle\!\langle \tilde{A}_i(\boldsymbol{\kappa}, t) \rangle\!\rangle = 0$ при любых t следуют ограничения $\langle\!\langle \tilde{A}^{(\pm)}_i(\boldsymbol{\kappa}, t) \rangle\!\rangle = 0$.

Для того, чтобы случайное поле $\tilde{A}_j(\boldsymbol{\kappa}, t)$ обладало, дополнительно, свойством стационарности по временнóй переменной, нужно чтобы $\langle\!\langle \tilde{A}^{(+)}_{j_1}(\boldsymbol{\kappa}) \tilde{A}^{(-)*}_{j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \rangle\!\rangle = 0$. При этом, беря комплексное сопряжение, как следствие получаем $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) = 0$. Следовательно, в этом случае

$$D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2) = D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)\big) + D^*_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}) \exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)\big)\,. \tag{4.25}$$

Из условия положительной определенности корреляционной функции $D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$, в условиях стохастических пространственной однородности и временнóй стационарности, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) u_i(\boldsymbol{\kappa}, t_1) u^*_j(\boldsymbol{\kappa}, t_2) \exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)\big) +$$
$$+ D^*_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) u^*_i(\boldsymbol{\kappa}, t_1) u_j(\boldsymbol{\kappa}, t_2) \exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1 - t_2)\big)\Big) d\boldsymbol{\kappa} \geq 0\,.$$

Вводя комплексные переменные

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_i(\boldsymbol{\kappa}, t) e^{ict|\boldsymbol{\kappa}|} d\boldsymbol{\kappa} = z_i(\boldsymbol{\kappa})\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

которые, ввиду произвольности функций $u_i(\boldsymbol{\kappa}, t)$, могут принимать любые комплексные значения независимо друг от друга, последнее условие положительной определенности записывается в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z_j^*(\boldsymbol{\kappa}) + D_{ij}^*(\boldsymbol{\kappa}) z_i^*(\boldsymbol{\kappa}) z_j(\boldsymbol{\kappa}) \Big) d\boldsymbol{\kappa} \geq 0\,.$$

Для выполнимости этого ограничения необходимо и достаточно, чтобы при любом $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^3$ имело место $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z_j^*(\boldsymbol{\kappa}) + D_{ij}^*(\boldsymbol{\kappa}) z_i^*(\boldsymbol{\kappa}) z_j(\boldsymbol{\kappa}) \geq 0$ для эрмитовской матрицы $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$. Меняя индексы суммирования во втором слагаемом $i \Leftrightarrow j$ и пользуясь эрмитовостью матрицы, получаем, что $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) z_i(\boldsymbol{\kappa}) z_j^*(\boldsymbol{\kappa}) \geq 0$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению:

Для того чтобы случайное гауссовское поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) + i\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$ с нулевым средним значением обладало статистически независимыми и эквивалентными соленоидальными составляющими $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$, а также свойствами стохастических пространственной однородности и стационарности по времени необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция $\bar{K}_{i_1 i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2)$ имела вид (22), где $D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1, t_1; \boldsymbol{\kappa}_2, t_2) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \delta_{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}} \delta_{\boldsymbol{\kappa}_2,\boldsymbol{\kappa}} D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$ и $D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$ определяется формулой (25) с неотрицательной эрмитовской матриц-функцией $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$.

Наконец, рассмотрим гауссовские случайные электромагнитные поля, которые, в дополнение к стохастическим однородностью по пространственным координатам и стационарностью по t, обладают также стохастической пространственной изотропией. В этом случае необходимо и достаточно, чтобы $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \delta_{ij} D(|\boldsymbol{\kappa}|)$ с $D(\xi) > 0$. При этом, ввиду (19), $\sum_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa}^4 D(|\boldsymbol{\kappa}|) < \infty$.

Так как корреляционная функция $\bar{D}_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t_1, t_2)$ зависит от разности $(t_1 - t_2)$, то она определяет стационарный случайный процесс. Тогда, если ввести спектральную плотность

$$\bar{D}_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa}; t, 0) e^{-it\omega} dt$$

такую, что $\boldsymbol{\kappa}^2 \bar{D}_{j,j}(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ является спектральной плотностью энергии стохастического электромагнитного поля в полости, то из (25) следует, что

$$\boldsymbol{\kappa}^2 \bar{D}_{j,j}(\boldsymbol{\kappa}, \omega) = 3\boldsymbol{\kappa}^2 D(|\boldsymbol{\kappa}|, T) \Big(\delta(\omega - c|\boldsymbol{\kappa}|) + \delta(\omega + c|\boldsymbol{\kappa}|) \Big)\,.$$

Заключение

Просуммируем результаты проведенного исследования в настоящей диссертационной работе.

1. На основе общих термодинамических построений получено общее уравнение теплопереноса в твердотельных средах с учетом наличия деформаций, связанных с ее неравномерной нагретостью. При этом предполагалось, что деформации носят абсолютно упругий характер и настолько малы, что имеет место линейная связь (уравнение состояния) между тензором напряжений деформаций Σ_{ij} и тензором деформаций u_{kl},

$$\Sigma_{ij} = \beta_{ij}(T) + C_{ijkl}(T)u_{kl}\,,$$

где тензор $\beta_{ij}(T)$ определяется формулой

$$\beta_{ij}(T) = -\int_{T_0}^{T} \alpha_{ij}(\tau)d\tau\,,$$

с симметричным тензором второго ранга $\alpha_{ij}(T)$, представляющим собой тензор коэффициентов теплового расширения, а тензор четвертого ранга $C_{ijkl}(T)$ представляет тензор упругих модулей.

Уравнение теплопереноса

$$\mathrm{c_v}(T, u_{kl})\frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla, \boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t)] -$$

$$-\Big(T_0\alpha_{ij}(T_0) + \int_{T_0}^{T} \tau\alpha'_{ij}(\tau)d\tau + C_{ijkl}(T)u_{kl}(\mathbf{x}, t)\Big)\frac{\partial u_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

предполагает: наличие дополнительно эволюционного уравнения для тензора деформаций, задание теплоемкости $\mathrm{c_v}(T, u_{kl})$ при постоянном давлении и плотности потока тепловой энергии $\boldsymbol{S}(\mathbf{x}, t; T)$. Это векторное поле представляется в виде

$$S_i(\mathbf{x}, t) = -\Big(\varkappa_{ij}(T)\nabla_j T\Big)(\mathbf{x}, t) + S_i[\mathbf{x}, t; T]\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

где первое слагаемое ответственно за перенос тепла посредством теплопроводности среды с тензором $\varkappa_{ij}(T)$ теплопроводности, а второе $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ описывает поток тепла, связанный с радиационным теплопереносом в твердотельной среде.

2. Предложен метод вычисления плотности потока энергии $\boldsymbol{S}[\mathbf{x}, t; T]$ теплового электромагнитного поля, осуществляющего перенос тепла. Он представляет собой модификацию метода, основанного на теории переноса излучения. В рамках этого метода функционал $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ может быть вычислен в приближении геометрической оптики. Расчет состоит в нахождении всех лучей $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{m})$ с начальной точкой $\mathbf{x}'$ и конечной точкой $\mathbf{x}'$. Множество всех возможных лучей перечисляется единичным вектором $\mathbf{m}$, который принимает дискретный набор значений. Плотность потока энергии имеет вид

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Lambda} I_0(\mathbf{x}',t)\sum_{\Gamma}\vartheta^{n(l[\Gamma])}\frac{\mathbf{m}[\Gamma]}{l^2[\Gamma]}\exp\big(-\gamma l[\Gamma]/\bar{c}\big)d\mathbf{x}'\,,$$

где $l[\Gamma]$ – длина луча, $n[\Gamma]$ – число точек отражения от границы, ϑ – коэффициент отражения луча, γ – линейный декремент затухания интенсивности энергии, переносимой лучом. В частности, когда теплоперенос осуществляется в области, занимающей все пространство $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\exp\big(-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/\bar{c}\big)I_0[\mathbf{x}',t;T]d\mathbf{x}'\,.$$

Здесь $I_0[\mathbf{x}',t;T]$ – зависящая от распределения температуры в среде интенсивность теплового излучения в точке $\mathbf{x}$.

Модификация метода состоит в учете весового множителя $l^{-2}[\Gamma]$, который отсутствует в стандартной теории переноса излучения.

3. Показано, что в случае сильного поглощения имеет место

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]=-\frac{\bar{c}^2}{3\gamma^2}\nabla I_0[\mathbf{x},t;T]\,.$$

4. Выявлены физические условия, при реализации которых на теплоперенос в конденсированной среде оказывает существенное влияние радиационный теплообмен. Конденсированная среда должна находиться в твердой фазе, должна обладать слабым поглощением электромагнитного излучения в красной и инфра-красной областях спектра, ее тепловое состояние должно обладать большими градиентами температуры, порядка $\sim 100^\circ$ на сантиметр и, следовательно она должна быть сильно разогретой $\sim 10^3$C, то есть иметь большую температуру плавления. Такими свойствами обладают твердотельные полупрозрачные диэлектрики или высокоомные полупроводники.

5. Установлены безразмерные параметры, которые являются характеристиками радиационного теплообмена в диэлектрической (полупроводящей) среде и малость которых позволяет построить позволяет построить флуктуационную теорию радиационного теплообмена. Таковыми параметрами являются: отношение радиуса корреляций r_0 пространственных флуктуаций токов Фуко, наводящихся в среде в процессе переноса тепла излучением, к характерной длине $\bar{L}$, на которой существенен перепад температуры; отношение $\bar{L}$ к длине поглощения $\gamma/\bar{c}$ электромагнитного излучения в среде в красной и инфра-красной областях спектра ($\bar{c}$ – скорость света в среде); отношение $\varkappa L/\bar{c}\bar{L}^2 \mathrm{c}_V$, где $\varkappa$ – теплопроводность среды и c_V – ее теплоемкость при постоянном объеме. Причем между этими параметрами должны иметь место следующие отношения: $\gamma\bar{L}/\bar{c} \ll r_0/\bar{L}$, $\varkappa/\bar{c}\bar{L}\mathrm{c}_V \ll r_0/\bar{L}$.

6. Построена математическая модель, на основе которой возможен учет флуктуаций теплового электромагнитного поля, порождаемого процессами излучения и поглощения излучения атомами (молекулами, ионами) среды вследствие их тепловых колебаний около равновесных значений. Модель представляет собой систему стохастических уравнений Максвелла в среде с малой электропроводностью,

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}} = [\nabla, \tilde{\mathbf{H}}]\,, \qquad (\nabla, \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\tilde{\rho}\,,$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} = -[\nabla, \tilde{\mathbf{E}}]\,, \qquad (\nabla, \tilde{\mathbf{H}}) = 0\,,$$

$$\dot{\tilde{\rho}} + (\nabla, \tilde{\mathbf{j}}) = 0\,,$$

в которой стохастическим источником гауссовского типа являются флуктуации $\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x}, t)$ плотности электрического тока $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) = \sigma\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x}, t)$, которые являются следствием имеющихся в среде тепловых колебаний. Источник моделируется в виде

$$\tilde{\boldsymbol{j}}(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t; T)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)\,,$$

где амплитуда $a(\mathbf{x}, t; T)$, медленно зависящая от изменения времени t и пространственной точки $\mathbf{x}$, причем эта зависимость определяется ее функциональной зависимостью от текущего распределения $T(\mathbf{x}, t)$ температуры в среде, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t)$ – случайное гауссовское поле с нулевым средним значением, полностью характеризующееся корреляционной функцией

$$K_{j_1 j_2}(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \left\langle\!\left\langle \tilde{\varphi}_{j_1}(\mathbf{x}_1, t_1)\tilde{\varphi}_{j_2}(\mathbf{x}_2, t_2) \right\rangle\!\right\rangle.$$

Функционал $a(\mathbf{x}, t; T)$ определяется равенством $a^2(\mathbf{x}, t; T)$ интенсивности $I_0(\mathbf{x}, t; T)$ излучения фотонов единицей объема среды, вычисляемой на основе функции распределения фотонов по их энергиям.

Диверегенция плотности $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ потока энергии этого поля в рамках развитой в работе теории радиационного теплообмена, которая вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T] = \left\langle\!\!\left\langle \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t) \right\rangle\!\!\right\rangle , \quad \tilde{\boldsymbol{S}}(\mathbf{x},t) = \frac{c}{4\pi}[\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{H}}](\mathbf{x},t) ,$$

интерпретируется как распределенный самосогласованный тепловой источник в общем уравнении переноса тепла в среде, учитывающий влияние радиационного теплообмена.

7. В рамках построенной модели, вычислены парные корреляционные функции электромагнитного поля и показано, что при при $t \gg \gamma^{-1}$ определяемый моделью случайный процесс, гауссовское случайное электромагнитное поле приближается стационарным по времени случайным гауссовским полем с нулевым средним значением, которое полностью определяется парными корреляционными функциями $\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\!\right\rangle_\infty$, $\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\!\right\rangle_\infty$, $\left\langle\!\!\left\langle \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_{j_1}(\mathbf{k}_1,t_1)\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}^*_{j_2}(\mathbf{k}_2,t_2) \right\rangle\!\!\right\rangle_\infty$. В работе вычислены эти корреляционные функции. Они определяются формулами (7.9), (7.13), (7.17).

8. В рамках построенной флуктуационной модели радиационного теплопереноса вычислена плотность потока энергии теплового электромагнитного поля

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T] = \int\limits_{\mathbb{R}^7} R_j(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s;\mathbf{x}-\mathbf{y}',t-s) \times$$

$$\times K(|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|)a(\mathbf{y},s;T)a(\mathbf{y}',s;T)d\mathbf{y}d\mathbf{y}'ds ,$$

$$R_j(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') = -R\Big[iU(\mathbf{x},t)\nabla'_j V^*(\mathbf{x}',t') +$$

$$+ \dot{V}(\mathbf{x},t)\nabla'_j V^*(\mathbf{x}',t') - i\bar{c}^2\nabla_m\nabla_j W(\mathbf{x},t)\nabla'_m V^*(\mathbf{x}',t')\Big] ,$$

$$R = 4\pi\bar{c}^2/\varepsilon ,$$

где операторы ∇_j и ∇'_m обозначают градиенты по векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, соответственно, точка обозначает дифференцирование по t и функции $U(\mathbf{x},t)$, $V(\mathbf{x},t)$, $W(\mathbf{x},t)$ даются следующими интегральными представлениями:

$$U(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x})+i\omega t)}{\omega - i\gamma}\, d\mathbf{k}d\omega ,$$

$$V(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x})+i\omega t)}{\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma}\,d\mathbf{k}d\omega\,,$$

$$W(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\frac{\exp(i(\mathbf{k},\mathbf{x})+i\omega t)}{(\omega-i\gamma)(\omega^2-\bar{c}^2\mathbf{k}^2-i\omega\gamma)}\,d\mathbf{k}d\omega\,.$$

9. Показано, что в пределе $\gamma\bar{L}/\bar{c}\to 0$, $r_0/\bar{L}\to 0$ функционал $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ дается формулой

$$\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]=K\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}\,\exp\Big\{-\frac{\gamma}{\bar{c}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\Big\}I_0[\mathbf{y},t;T]d\mathbf{y}\,,$$

где $K=\dfrac{r_0^{-3}RQ_0}{4\pi\bar{c}^2}$ и f – функция распределения фотонов по энергиям

$$I_0[\mathbf{y},t;T]=\hbar\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^3 f\Big(\frac{\hbar\omega}{\mathrm{k}\,T(\mathbf{y},t)}\Big)d\omega\,.$$

Эта формула совпадает с формулой, полученной на основе модифицированной теории переноса излучения.

10. Показано, что плотность потока энергии $\boldsymbol{S}[\mathbf{x},t;T]$ не содержит вихревой составляющей.

11. Показано, что в одномерной геометрии распределения температуры в среде плотность потока энергии теплового переходит в выражение, получаемое на основе стандартной теории переноса излучения

$$S[x,t;T]=\frac{RQ_0}{2\bar{c}^2 r_0}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{sgn}(x-y)e^{-\gamma|x-y|/\bar{c}}\,I_0(y,t;T)dy\,.$$

12. На основе вычисленной плотности потока энергии электромагнитного поля получено общее уравнение переноса тепла в диэлектрической полупрозрачной среде с учетом радиационного теплопереноса,

$$\mathrm{c_v}(T)\dot{T}(\mathbf{x},t)=\nabla_i\varkappa_{ij}(T)\nabla_j T(\mathbf{x},t)+$$
$$+K\Big(\gamma\bar{c}^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\exp\Big\{-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/\bar{c}\Big\}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}I_0[\mathbf{y},t;T]d\mathbf{y}-4\pi I_0[\mathbf{x},t;T]\Big)\,.$$

13. В отсутствие стохастических источников $\tilde{\boldsymbol{j}}=0$ дается описание всех случайных гауссовских электромагнитных полей $\langle\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{H}}\rangle$ с нулевым средним значением и со статистически независимыми электрической и магнитной составляющими, которые являются стохастически однородными, изотропными и стохастически стационарными по времени. Это описание дается в терминах комплекснозначного поля $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t) + i\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)$.

Случайное гауссовское поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)$ с нулевым средним значением в области $\Lambda = [0,L]^3$ представляется в виде

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\Lambda}} \bar{\tilde{\mathbf{F}}}(\boldsymbol{\kappa},t)\exp\big(i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{x})\big)\,,$$

$\bar{\Lambda} = \Big\langle \boldsymbol{\kappa} = \frac{2\pi}{L}n_i\mathbf{e}_i : n_j \in \mathbb{Z}, j = 1,2,3\Big\rangle$, $\mathbf{e}_j$, $j = 1,2,3$ — орты в $\mathbb{R}^3$. При этом

$$\sum_{\boldsymbol{\kappa}\in\bar{\tilde{\Lambda}}} \boldsymbol{\kappa}^2|\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa},t)|^2 < \infty\,,$$

$$\bar{\tilde{F}}_i(\boldsymbol{\kappa},t) = \frac{1}{|\Lambda|}\int\limits_{\Lambda} \tilde{F}_i(\mathbf{x},t)\exp(-i(\mathbf{x},\boldsymbol{\kappa}))d\mathbf{x}\,,$$

$|\Lambda|$ — объем области Λ.

Случайное поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t)$ характеризуется корреляционной функцией

$$K_{ij}(\mathbf{x},t;\mathbf{y},s) = \langle\!\langle \tilde{F}_i(\mathbf{x},t)\tilde{F}^*_j(\mathbf{y},s)\rangle\!\rangle\,.$$

Доказано следующее утверждение.

Для того чтобы случайное гауссовское поле $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t) + i\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)$ *с нулевым средним значением обладало статистически независимыми и эквивалентными соленоидальными составляющими* $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x},t)$ *и* $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x},t)$, *а также свойствами стохастических пространственной однородности и стационарности по времени необходимо и достаточно, чтобы фурье-образ его корреляционной функции* $\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2)$ *имел вид*

$$\bar{K}_{i_1i_2}(\boldsymbol{\kappa}_1,t_1;\boldsymbol{\kappa}_2,t_2) = \epsilon_{i_1j_1k_1}\epsilon_{i_2j_2k_2}\kappa_{j_1}\kappa_{j_2}\delta(\boldsymbol{\kappa}_1+\boldsymbol{\kappa}_2)D_{k_1,k_2}(\boldsymbol{\kappa}_1;t_1,t_2)\,,$$

$$D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa};t_1,t_2) = D_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa})\exp\big(ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1-t_2)\big) + D^*_{j_1,j_2}(\boldsymbol{\kappa})\exp\big(-ic|\boldsymbol{\kappa}|(t_1-t_2)\big)\,,$$

ϵ_{ijk} *— псевдотензор Леви-Чивитта,* $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$ *– положительная эрмитовская матриц-функция, с конечной нормой* $\sum_{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{\kappa}^4\|D_{j_1j_2}(\boldsymbol{\kappa})\|$.

Если поле стохастически изотропно, то $D_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \delta_{ij}D(|\boldsymbol{\kappa}|)$ с $D(z) > 0$.

Список публикаций по теме диссертации

Л1. **Фат Л.Т.**, Вирченко Ю.П. Движение частицы в случайном стохастически однородном и изотропном магнитном поле с частотным спектром белого шума // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.192-193.

Л2. **Фат Лам Тан**, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные магнитные поля // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика. – 2013. – 19(162);32. – С.176-183.

Л3. **Фат Лам Тан**, Вирченко Ю.П. О теореме Гельмгольца для почти-периодических в среднем квадратичном векторных полей // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика. – 2013. – 26(169);33. – С.99-104.

Л4. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные соленоидальные гауссовские поля // Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна / Воронеж: ВГУ, 2014. – С.204-208.

Л5. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Гауссовские почти периодические в среднем квадратичном соленоидальные векторные поля // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика. – 2014. – 5(176);34. – С.134-141.

Л6. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Гауссовское флуктуационное электромагнитное поле с почти периодические в среднем квадратичном реализациями // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика. – 2014. – 12(183);35. – С.200-213.

Л7. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Гауссовское флуктуационное электромагнитное поле с почти-периодическими в среднем квадратичном реализациями // Bulletin of Kherson National Technical University. – 2014. – 3(50). – С.328-330. ISSN 2078-4481.

Л8. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Стохастические модели электромагнитного поля // Proceedings XII of young scientists school "Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics", KBR, Terskol 3-7 December 2014 // Нальчик: Институт прикладной математики и автоматизации, 2014. – С.45-47.

Л9. **Фат Л.Т.**, Вирченко Ю.П. Парные корреляционные функции стохастического электромагнитного поля // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика. – 2014. – №25(196); 37 – С.97-107.

Л10. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Стохастические электромагнитные поля в диэлектрической среде. 1. Построение модели // Научные ведомости

БелГУ. Математика & Физика. – 2015. – №5(202); 38. – С.119-129.

Л11. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Стохастические электромагнитные поля в диэлектрической среде. 2. Вычисление корреляционных функций // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика. – 2015. – №11(208); 39. – С.126-140.

Л12. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Гауссовские модели флуктуационного электромагнитного поля // Вестник Тамбовского университета. – 2015. – 20; 1. – С.125-129.

Л13. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Решение задачи переноса излучения в слое полупрозрачного диэлектрика в приближении геометрической оптики // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика. – 2015. – №17(214); 40. – С.171-181.

Л14. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Стохастическая модель переноса излучения в $\mathbb{R}^3$ // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2016» / Воронеж: Научная книга, 2016. – С.262-266.

Л15. **Lam Tan Phat**, Virchenko Yu.P. One-dimensional stochastic model of radiative heat transfer in dielectric medium // Funct. Mater. – 2016; 23 (1). –P.075-082.

Л16. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Поток энергии электромагнитного поля в стохастической модели радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрической твердотельной среде // Тезисы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики», 17-21 октября 2016, Нальчик-Терскол, КБР, Россия. – С.176-178.

Л17. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Поток энергии электромагнитного поля в стохастической модели радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрической твердотельной среде // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика. – 2016. – №27(248); 45. – С.127-149.

Л18. **Lam Tan Phat**, Virchenko Yu.P. Energy flux of electromagnetic field in stochastic model of radiative heat transfer in dielectric solid medium // Funct. Mater. – 2017; 24 (1). – P.106-116.

Л19. **Лам Тан Фат**, Вирченко Ю.П. Общее феноменологическое уравнение теплопереноса в твердотельной среде // Научные ведомости БелГУ. Математика & Физика.– 2017.– №6(255); 46.– С.145-148.

Л20. **Lam Tan Phat**, Virchenko Yu.P. Energy flux of electromagnetic field in stochastic model of radiative heat transfer in dielectric solid medium // arXiv:1703.05941v1 [cond-mat.stat.-mech]. – 2017 (17 March). – 18 p.

Список литературы

1. A treatise on electricity and magnetism. Vol. II / Oxford: Clarendon Press, 1873.
   Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т.2. / М.: Наука, 1989. – 434 с.
2. Kirchhoff G.R. // Annalen der Physik. – 1860. – 19. – S.275-301.
   Кирхгоф Г. Об отношении между испускательной и поглощательной способностями тел для тепла и света / Шепф Х.-Г. От Кирхгофа до Планка / пер. с нем., М.: Наука, 1981. – С.124-143.
   Schöpf H.-G. Von Kirchhoff bis Plank Academie-Verlag: Berlin, 1978. – 191s.
3. Bouguer P. Traite d′optique sur la gradation de la lumiere / Paris, 1760.
   Бугер П. Оптический трактат о градации света / Серия «Классики науки» / М.: Изд-во АН СССР, 1950. – 484 с.
4. Ельяшевич М.А. Излучение равновесное // Физическая энциклопедия т.2 / под ред. Прохорова А.М. / М.: Советская энциклопедия, 1990. – С.110-111.
5. Ельяшевич М.А. Атомная и молекулярная спектроскопия / М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 894 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики / 2 изд., т.4. Оптика / М.: Физматлит, 2005. – 768 с.
7. Goulard R. One-dimensional energy transfer in radiant media // International Journal Energy Mass Transfer. – 1960. – 1. – P.81-91.
8. Viskanta R. Radiation transfer and interaction of convection with radiation heat transfer // In «Advances in Heat Transfer», Vol.3 / New York: Academic Press, 1966.
9. Boltzman L. // Annalen der Physik. – 1884. – 22. – S.291-294.
   Больцман Л. Вывод закона Стефана о зависимости теплового излучения от температуры из электромагнитной теории света / Избранные труды / М.: Наука, 1984. – С.337-339.
10. Sparrow E.M., Cess R.D. Radiation heat transfer. Brooks/ Belmont, California: Cole Publishing Company, 1970.
    Спэрроу Э.М. Теплообмен излучением / Э.М. Спэрроу, Р.Д. Сесс. – Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1972. – 295 с.
11. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
12. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена / Изд. 5-е / М.:Атомиздат, 1979. – 416 р.
13. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 616 с.
14. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах / Новосибирск: Наука, Сибирское отд. 1984. – 278 с.
15. Петров В.А., Марченко Н.В. Перенос энергии в частично прозрачных твердых материалах. М: Наука 1985, 190 с.
16. Борн М. Атомная физика / М.: Мир, 1965. – 492 с.
17. Planck M. // Annalen der Physik. – 1900. – 1. – S.69–122.
    Планк М. О необратимых процессах излучения / Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.191–233.
18. Wien W. // Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie (Wied. Ann.) – 1896. – 58. – S.662.
19. Planck M. // Annalen der Physik. – 1900. – 1. – S.719-737.
    Планк М. Энтропия и температура лучистой энергии / Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.234-248.
20. Planck M. // Verhandl. Dtsch. phys. Ges. – 1900. – 2. – S.202-204.
    Планк М. Об одном улучшении закона излучения вина / Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.249-250.
21. Planck M. // Verhandl. Dtsch. phys. Ges. – 1900. – 2. – S.237-245. Планк М. К теории распределения энергии излучения нормального спектра / Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.251-258.

22. Planck M. // Annalen der Physik. – 1901. – 4. – S.553-563.
Планк М. О законе распределения энергии в нормальном спектре / Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.259–267.
23. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения / М.: Изд. АН СССР, 1953.
24. Левин М.Л., Рытов С.М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике // М.: Наука, 1967. – 308 с.
25. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля / М.: Наука, 1978. – 464 с.
26. Рытов С.М. О переходе к геометрическому приближению в электродинамике сплошных сред // ДАН СССР. – 1938. – 18. – С.283.
27. Рытов С.М. Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа, I и II // ЖЭТФ. – 1955. – 29, вып.3(9). – С.304, С.315.
28. Рытов С.М. О тепловых флуктуациях в распределенных системах // ДАН СССР. – 1956. – 110. – С.371.
29. Рытов С.М. Корреляционная теория тепловых флуктуаций // ЖЭТФ. – 1957. – 33. – С.166.
30. Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences / 2d ed. / Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1985. (К.В. Гардинер Стохастические методы в естественных науках / М.: Мир, 1986.)
31. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions / Berlin: Springer-Verlag, 1984. (Хорстхемке В., Лефевер Р. Индуцированные шумом переходы / М.: Мир, 1987.– 398 с.)
32. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P. Analytic approach to the heat radiative conduction problem in semi-transparent media. The large optical length approximation // Functional Materials. – 2006. – 13;3. – P.372-380.
33. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P. The heat radiative conduction problem in semi-transparent media. The small reflection coefficient approximation // Functional Materials. – 2007. – 14;2. – P.164-170.
34. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P. The approximation of small reflection coefficient in the problem of the heat radiative conductance in semitransparent media // International Conference "Crystal Materials 2007"(ICCM2007), September 2007. Kharkov. – P.29.
35. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P. Radiative Conduction Problem in Thin Layer of Semi-Transparent Media. The Weak Absorbtion case // Functional Materials. – 2007. – 14;4. – P.1-7.
36. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Стохастическая теория переноса теплового электромагнитного излучения в полупрозрачном диэлектрике // Тезисы X Международной конференции «Прикладная математика и дифференциальные уравнения». Минск, 2008. – Минск: Институт математики НАН Белоруси, 2008. – С.68-69.
37. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачном диэлектрике // Материалы Второй Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения». Минск, 24-28 августа 2009. часть I. – С.34-35.
38. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача переноса излучения со стохастическими источниками // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – 2(35). – С.146-150.
39. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Флуктуационный подход // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. – 2009. - 5(60);16. – С.47-67.

40. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Стохастическая гауссовская модель радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачном диэлектрике // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, 13-15 мая 2010г. Матеріали конференції, III. – Київ: Інститут математики НАН України, 2010. – С.30.
41. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Построение гауссовской флуктуационной модели равновесного теплового излучения // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);19. – С.144-156.
42. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Доповіді НАНУ. – 2010. – 12. – С.63-69.
43. Saprykin M.A., Virchenko Yu.P. One-dimensional problem of the heat radiative conductance // Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна 2010. Тезисы докладов. – Воронеж: ВГУ, 2010. – P.168-169.
44. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. The infinite dimensional gaussian random processes in the stochastic model of radiative conductance // International Conference Modern Stochastics: Theory and Applications II September 7-11, 2010, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – P.121.
45. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. Fluctuation theory of the radiation heat conductance in dielectrics // International Conference "Crystal Materials 2010", May 31 - June 03, 2010, Kharkov, Ukraine. Abstracts. – P.46.
46. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Неравновесная термодинамика радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрических средах // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2011. – 23(118);25. – С.158-167.
47. Saprykin M.A., Virchenko Yu.P. Fluctuation theory of the heat radiation conductance // 3d International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics QEDSP2011 August 29- September 2, 2011, Kharkov, Ukraine / Book of Abstracts. – Kharkov: National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology". – P.133.
48. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. Nonequilibrium thermodynamics of heat radiation conduction in dielectric media / Functional Materials. – 2011. – 18;4. – P.504-511.
49. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. Gaussian fluctuation field of electrical polarization in strong heated dielectric media // Problems of Atomic Science and Technology. Series Nuclear Physics Investigations. – 2012. – 1. – P.203-205.
50. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. Nonequilibrium thermodynamics of heat radiation conduction in semi-transparent dielectric medium // Конференция стран СНГ по росту кристаллов. Харьков, 2012, октябрь. Тезисы докладов / Харьков: НТК«ИМН» НАНУ, 2012. – С.127.
51. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / пер. с англ. / М.: Мир, 1986. – 664 с.
Bohren C.F., Huffman D.R Absorption and Scattering of Light by Small Particles / New York, Toronto : John Wiley & Sons, Inc., 1983.
52. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости / изд.4-е. Серия «Теоретическая физика», т.7 / М.: Наука, 1987. – 248 с.
53. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1 / изд.4-е. Серия «Теоретическая физика», т.5 / М.: Наука, 1976. – 584 с.
54. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды / Бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики / М.: Наука, Физматлит, 1990. – 290 с.
55. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной / М. : Физматлит, 2005. – 336 с.
56. Зверев В.А., Кривопустова Е.В., Точилина Т.В. Оптические материалы. Часть 2 / Учебное пособие для конструкторов оптических систем и приборов / Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2013. – 248 с.
57. http://www.tydexoptics.com/ru/materials/for_transmission_optics/

58. Таблицы физических величин. Справочник / Гл.ред. И.К. Кикоин / Москва: Атомиздат, 1976. – 1006 с.
59. Физические величины: Справочник/ Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др.; Под. ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. / М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с. ISBN 5-283-04013-5.
60. Леванюк А.П. Диэлектрики // Физическая энциклопедия т.1 / под ред. Прохорова А.М. / М.: Советская энциклопедия, 1988. – С.694-698.
61. Эпштейн Э.М. Электропроводность // Физическая энциклопедия т.5 / под ред. Прохорова А.М. / М.: Советская энциклопедия, 1998. – С.589-590.
62. Тамм И.Е. Основы теории электричества / М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
63. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики / М.: Мир, 1970. – 428 с.
64. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / 2-е изд. / М.: Физ.-мат. лит., 1960. – 884 с.
65. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля / пер.с англ. / М.: Мир, 1976. – 360 с.
(Simon B. The $P(\varphi)_2$ euclidian quantum field theory / Princeton: Princeton University Press, 1974).
66. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / М.: Эдиториал УРСС, 2005. – 448 с.
67. Ли Цзун Дао Математические методы в физике /пер. с англ./ М.: Мир, 1965. – 296 с.
(Lee T.D. Mathematical methods of physics / New York: Columbia university, 1963.)
68. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных полях / М.: Наука, 1980. – 336 с.
69. Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences / 2d ed. / Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1985. (К.В.Гардинер Стохастические методы в естественных науках / М.: Мир, 1986.)
70. Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т.1 / М.: Наука, 1971. – 664 с.
71. Яглом А.М. Спектральные представления для различных классов случайных функций // в кн.: Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, т. 1 / Л.: Изд. Ленинградского у-та, 1963. – С.250-273.
72. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / М.: Физматгиз, 1962. – 648 с.
73. Акустические кристаллы. Справочник / Гл.ред. М.П.Шаскольская / Москва: Наука, 1982. – 632 с.
74. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987. – 352 с.
75. Федорюк М.В. Метод перевала / М.: Наука, 1977. – 368 с.
76. Де Гроот С.Р., Сатторп Л.Г. Электродинамика / М.: Наука, 1982. – 560 с.
77. Arizumi T., Kobayashi N. J. // Crystal Growth. – 1972. – 13. – P.615.
78. Atherton L.A., Derby J.J., Brown R.A. Radiative heat exchange in Czochralski cryastal growth // Journal of Crystal Growth. – 1987. – 84. – C.57-78.
79. Dupret F., Nicodéme P., Ryckmans Y. Numerical method for reducing stress level in GaAs crystals // Journal of Crystal Growth. – 1989. – 97. – C.162-172.
80. Viskanta R. Heat transfer of thermal radiation absorbing and scattering media // AEC Research and Development Report. – ANL 6170. May 1960.
81. Ли Цзун Дао Математические методы в физике /пер. с англ./ М.: Мир, 1965. –
(Lee T.D. Mathematical methods of physics / New York: Columbia university, 1963. – 296 с.)
82. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров / М.: Наука, 1981. – 720 с.
83. Кочин Н.Е. Ч Векторное исчисление и начала тензорного анализа / М.: Наука, 1965. – 428 с.

84. Slezova Zh.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Effect of Topologically Non-trivial Magnetic Fields on the Magnetic Moment Evolution / Functional Materials. – 2000. – 7; №3. – P.384-389.
85. Chechkin A.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Anomalous Flow of Passive Admixture in Helical Turbulence / Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. – 1998. – 88. – P.187-213.
86. Тур А.В., Чечкин А.В., Яновский В.В. Аномалии переноса в отражательно неинвариантной теории турбулентности / Электромагнитные явления. – 1998. – 1,№2. – С.233-238.
87. Chechkin A.V., Tur A.V., Yanovskii V.V. Kinetic effects stochastic topological nontrivial fields // Physica A. – 1994. – 208. – P.501-522.