ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

"Белгородский государственный национальный исследовательский университет" (НИУ "БелГУ")

На правах рукописи

Самойлова Надежда Николаевна

Исследование обтекания неравномерно нагретого сфероида с помощью краевых задач для линеаризованной по скорости системы уравнений газовой динамики

Специальность: 01.01.03 — Математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Н.В. Малай

Белгород — 2019

Содержание

Введение

Актуальность темы. Все большую значимость в последнее время приобретают математические исследования физических свойств аэродисперсных систем и создание на этой основе математических моделей, позволяющих описывать их поведение. Под аэродисперсной системой понимают газообразную среду (однокомпонентную или многокомпонентную) со взвешенными в ней частицами, называемыми аэрозолями, спектр применения которых очень широк. Их применяют в производстве, медицине, в областях химических технологий, сельском хозяйстве, гидрометеорологии, охране окружающей среды и т.д. [23, 25, 27, 39, 42, 97].

Проблема математического описания поведения взвешенных частиц в газообразных средах, является одной их важнейших проблем механики аэродисперсных систем, которая активно разрабатывается как за рубежом, так и в нашей стране. Без знания закономерностей такого поведения невозможно математическое моделирование эволюции аэродисперсных систем и решение такого важного вопроса как целенаправленное воздействие на них.

В динамике аэродисперсных систем, важными научными направлениями, являются математические исследования закономерностей движения аэрозолей в неоднородных по температуре вязких газообразных средах. Это движение обусловлено действием сил молекулярного происхождения, появление которых вызвано передачей нескомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды [34]. Например, движение частиц во внешнем заданном поле градиента температуры называется термофоретическим [12, 15, 34, 106, 156, 158, 159, 165]. Фотофоретическое движение частиц возникает при неоднородном нагреве их поверхности электромагнитным излучением [16, 39, 45, 133, 136, 155, 157, 163, 164, 166]. Явления термо- и фотофореза практически всегда сопутствуют термодинамически неравновесным аэродисперсным системам, которые, как правило, и встречаются в производстве и в природе. Зачастую они могут оказаться определяющими в динамике аэродисперсных систем.

Важной величиной, характеризующей состояние аэродисперсной системы, является относительный перепад температуры $\Theta(T)$ [64], под которым понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы T_S и температурой области вдали от нее T_∞ к последней, то есть величину $\Theta(T) = (T_S - T_\infty)/T_\infty$. Относительный перепад температуры считается малым при $\Theta(T) \ll 1$ и значительным в противном случае. В первом случае вязкая газообразная среда называется изотермической, а во втором — неизотермической. В последнем случае саму аэрозольную частицу называют нагретой. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением частицей электромагнитного излучения и т.д.

В литературе к настоящему времени достаточно полно разработана теория термо- и фотофореза аэрозольных частиц в вязких изотермических газообразных средах как сферической, так и несферической (слабо деформированная сфера, сфероид, цилиндр, эллипсоид) формы поверхности [40, 54, 58, 106, 109, 111, 132, 133, 137, 139, 141, 143, 171]. Большой вклад в исследование и применение аэродисперсных систем внесли ряд отечественных и зарубежных исследователей: J.C. Maxwell, P.S. Epstein, F. Ehrenhaft, J.R. Brock, Н.А. Фукс, В.М. Волощук, Б.В. Дерягин, П.Е. Суетин, О.А. Волковицкий, Ю.И. Яламов, А.А. Юшканов, С.П. Баканов, Е.Р. Щукин, М.Н. Гайдуков и др.

При выполнении условия $\Theta(T) \ll 1$ система уравнений вязкой изотермической газообразной среды существенно упрощается. Коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность) и плотность газообразной среды можно считать постоянными величинами и, система уравнений распадается на гидродинамическую (система уравнений Навье-Стокса) и тепловую (уравнение Лапласа и уравнение Пуассона).

С математической точки зрения наибольший интерес как в неизотермическом, так и в изотермическом случаях имеет система уравнений Навье-Стокса, представляющая математическое выражение законов сохранения импульса и массы [56, 122, 125]. Система уравнений Навье-Стокса относится к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно из наиболее неприятных из их свойств – нелинейность, обусловленная наличием конвективного члена ускорения $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$. Кроме того, и сами краевые задачи для уравнений Навье-Стокса, описывающие течения вязкой несжимаемой среды (газ, жидкость), могут быть нелинейными. В этом контексте на первый план выходит вопрос не только нахождения решений системы уравнений Навье-Стокса, но и разрешимости краевых задач для этой системы [7, 24, 31, 53, 54, 55, 92, 100, 107, 122]. Традиционно эти факторы считаются главными препятствиями на пути исследования решений системы уравнений Навье-Стокса ([55]).

Первоначально усилия исследователей при исследовании системы уравнений гидро - газовой динамики были направлены на отыскание точных решений. Например, для несжимаемой жидкости получены точные решения для установившихся течений Пуазейля, Куэтта и т.д. Найдены также некоторые автомодельные решения. Почти все точные решения не несут в себе специфики нелинейности задачи (соответствующие им нелинейные члены в системе уравнений Навье-Стокса равны нулю).

Значение точных решений уравнений гидро- и газовой динамики в настоящее время не исчерпано. С каждым годом растет интерес к ним. Они незаменимы, например, при тестировании численных методов, при обосновании приближенных моделей в динамике жидкости и газа, анализе сингулярностей в решениях уравнений Навье-Стокса и т.д. Вместе с тем, как известно, вплоть до настоящего времени не имеется доказательства существования глобальных решений системы уравнений Навье-Стокса для сколько-нибудь широкого класса начальных и краевых условий [53, 54, 55]. Этой проблемой занимались такие математики, как J. Leray, E. Hopf, J.L. Lions, М.И. Вишик, Т.М. Фишер и многие другие ([55, 149, 154]). Большой вклад в развитие теории решений системы уравнений Навье-Стокса внесла О.А. Ладыженская [53, 54, 55].

В связи с большими математическими трудностями, на настоящем этапе развития математики, построения общей теории начально-краевых задач для системы уравнений гидро- и газовой динамики не представляется возможным. В тоже время, в связи с большой практической востребованностью такой системы, в важных частных, конкретных случаях развивались приближенные математические методы. Они позволили в той или иной мере упростить и приспособить ее к характеру отдельных типов конкретных физических задач. Существует обширный класс гидродинамических течений, в которых можно пренебречь нелинейными слагаемыми. Сюда относят, например, стационарные течения с малыми скоростями. В научной литературе такие уравнения получили название "линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса", изучение решений которых представляет большой научный, практический, а также методологический интерес и позволяет развить математический аппарат, необходимый для исследования уже самой полной системы уравнений гидро-и газовой динамики.

Входящие в состав реальных аэродисперсных систем аэрозольные частицы, могут иметь форму поверхности, отличную от сферической, например, сфероидальную, т.е. форму поверхности вытянутого или сплюснутого эллипсоида вращения. Выбор частиц, имеющих форму сплюснутого (вытянутого) сфероида в диссертационном исследовании, обусловлен тем, что при соответствующем подборе отношения полуосей сфероида они вырождаются в слабо деформированную сферу, в плоский бесконечно тонкий диск, длинный тонкий стержень и т.д., и таким образом перекрывается достаточно широкий класс прикладных задач.

В научной литературе до настоящего времени не учитывалось влияние конвективного члена в уравнении теплопроводности (влияние движения среды) на силу и скорость термо- и фотофореза крупных нагретых аэрозольных частиц сфероидальной формы при больших перепадах температуры.

Общее уравнение переноса тепла в стационарном приближении имеет следующий вид [56]:

$$\rho_g(x)c_{pg}(x)\big(\mathbf{U_g}(x)\nabla\big)T_g(x) = \operatorname{div}\big(\lambda_g(x)\nabla T_g(x)\big),$$

где $\mathbf{U_g}(x)$ - вектор скорости, $T_g(x)$ - температура, $\rho_g(x)$ - плотность, $c_{pg}(x)$ - удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\lambda_g(x)-$ коэффициент теплопроводности газообразной среды, $\nabla-$ оператор набла, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$.

Из этого уравнения видно, что если характерная скорость задачи мала (число Рейнольдса много меньше единицы) и относительный перепад температуры в газе мал, то конвективным переносом тепла $\rho_g c_{pg}\left(\mathbf{U_g}\nabla\right)T_g$ можно пренебречь по сравнению с молекулярным переносом тепла $\operatorname{div}\big(\lambda_g\nabla T_g\big)$. Ситуация существенно меняется, когда у нас относительный перепад температуры в газе значительный, т.е. характерная скорость мала, но $(T_S - T_\infty)/T_\infty \sim 0(1)$. В этом случае конвективный перенос тепла $\rho_g c_{pg} (\mathbf{U_g}\nabla) T_g$ по порядку величины сравним с молекулярным переносом тепла $\mathrm{div}\big(\lambda_g \nabla T_g\big)$ и его необходимо учитывать. Впервые влияние нагрева поверхности и движения среды на силу и скорость термо-и фотофореза крупных аэрозольных частицы сферической формы было проведено в работах [61, 62, 64, 65, 67, 70, 120, 121]. Было показано, что нагрев поверхности сферической частицы приводит к нелинейному характеру зависимости силы и скорости термо-и фотофореза, а учет конвективного члена в уравнении теплопроводности дает вклад до 40 процентов к силе и скорости обычного термо-и фотофореза.

В диссертационной работе строится теория влияния движения среды (учтен конвективный член в уравнении теплопроводности) на термо- и фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сфероидальной формы. В данном контексте мы получаем существенно нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных для вязкой неизотермической газообразной среды. Даже ее линеаризация по скорости приводит к сложной нелинейной системе уравнений газовой динамики, поскольку в этом случае необходимо учитывать зависимость плотности, теплопроводности и вязкости от температуры. Такая система уравнений в настоящее время является малоизученной и построение ее решений для частных конкретных случаев (прикладных задач) является актуальным и представляет как теоретическую, так и практическую значимость.

Цель работы – исследование обтекания неравномерно нагретого сфероида с помощью краевых задач для линеаризованной по скорости системы уравнений газовой динамики, включающих в себя линеаризованную по скорости систему стационарных уравнений Навье-Стокса, конвективное уравнение переноса тепла, уравнение состояния среды с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры и уравнение теплопроводности, описывающей поле температуры внутри частицы, с учетом степенного вида зависимости коэффициента теплопроводности частицы от температуры при не азимутально-симметричном распределении плотности тепловых источников по объему частицы на примере термо- и фотофоретического движения нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи:**

1. Получить решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса в сфероидальной системе координат с учетом зависимости коэффициента молекулярного переноса (вязкости) и плотности газообразной среды от температуры; получить выражения для компонентов массовой скорости и давления, а также выражение силы, действующей со стороны вязкой неизотермической газообразной среды при осесимметричном обтекании нагретой частицы сфероидальной формы.

2. Решить краевую задачу для конвективного уравнения теплопроводности в сфероидальной системе координат методами сращиваемых асимптотических разложений и теории возмущений с учетом зависимости коэффициента теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры при не азимутально-симметричном распределении плотности тепловых источников по объему частицы при малых числах Рейнольдса и Пекле.

3. Исследовать влияние движения вязкой неизотермической газообразной среды на термо- и фотофорез нагретых крупных твердых частиц сфероидальной формы.

Методы исследования: в диссертационной работе используется метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений $n-$го порядка в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса), метод сращиваемых асимптотических разложений, метод теории возмущений.

Научная новизна. В диссертации доказана теорема существования решения для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами; получено решение в сфероидальной системе координат линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса с учетом степенного вида зависимости коэффициента молекулярного переноса (вязкости) и плотности газообразной среды от температуры; найдены выражения для компонентов массовой скорости и давления, а также силы, действующей со стороны вязкой неизотермической газообразной среды при осесимметричном обтекании нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы; получены асимптотические формулы для поля температуры из решения краевых задач для конвективного уравнения теплопроводности в сфероидальной системе координат при малых числах Рейнольдса и Пекле; получены выражения, позволяющие учитывать влияние движения среды на силу и скорость термо- и фотофореза нагретых крупных твердых аэрозольных частиц сфероидальной формы в вязкой неизотермической газообразной среде и проведены качественные оценки этого влияния.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость результатов диссертации обусловлена тем, что методы, используемые при решении системы уравнений газовой динамики, могут быть применены при математическом описании движения частиц и с более сложной геометрией.

Практическая значимость результатов обусловлена тем, что полученные в диссертации выражения для силы и скорости термо- и фотофореза твердых крупных нагретых аэрозольных частиц сфероидальной формы с учетом движения среды позволяют: оценивать скорость движения несферических частиц в разнотемпературных каналах; проектировать экспериментальные установки, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц, обладающих сфероидальной формой; описывать процесс осаждения аэрозольных частиц несферической формы в разнотемпературных каналах; разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных примесей, имеющих несферическую форму и т.п.

Положения, выносимые на защиту.

1. Решение линеаризованной по скорости стационарной системы уравнений Навье-Стокса в сфероидальной системе координат для осесимметричного

случая с учетом степенного вида зависимости коэффициентов динамической вязкости, теплопроводности и плотности вязкой неизотермической газообразной среды от температуры.

2. Теорема существования решения для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами.

3. Решение краевых задач для конвективного уравнения теплопроводности в сфероидальной системе координат методами сращиваемых асимптотических разложений и теории возмущений с учетом зависимости коэффициентов теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры при не азимутально-симметричном распределении плотности тепловых источников по объему частицы при малых числах Рейнольдса и Пекле.

4. Теория термо- и фотофореза крупных неравномерно нагретых аэрозольных частиц сфероидальной формы поверхности, учитывающая влияние движения вязкой неизотермической газообразной среды.

Достоверность и обоснованность полученных научных результатов обусловлена корректностью математических вычислений с использованием положений и теорем теории дифференциальных уравнений; корректностью построения математических моделей физических систем; согласованностью полученных в диссертации результатов с известными результатами и экспериментальными данными.

Аппробация работы. Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих международных и российских конференциях:

1. XXX конференция молодых ученых на Механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова (г. Москва, 2008).

2. Вторая международная научная конференция "X Белорусской математической конференции" (г. Минск, 2008).

3. Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XX" (г. Воронеж, 2009).

4. XIV Международная научная конференция по дифференциальным

уравнениям "Еругинские чтения - 2011" (Новополоцк, 12-14 мая 2011 г.).

5. XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения - 2013) (Гродно, 13-16 мая 2013 г.).

6. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Белгород, 25-31 мая 2013 г.).

7. Международная научная конференция "Колмогоровские чтения-VIII. Общие проблемы управления и их приложения" (Тамбов, 1-5 октября 2018 г.).

Также результаты диссертации были представлены на заседаниях кафедры теоретической и математической физики НИУ "БелГУ" (заведующий - Ю.П. Вирченко); на семинаре по дифференциальным уравнениям кафедры математического анализа НИУ "БелГУ" (руководитель - профессор А.П. Солдатов).

По теме диссертации выигран грант: Государственный контракт №П29 от 25 марта 2010 г. "Проведение поисковых научно-исследовательских работ по направлению "Механика" в рамках мероприятия 1.3.2 Программы в рамках мероприятия 1.3.2 "Проведение научных исследований целевыми аспирантами" федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы" на тему "Влияние нагрева поверхности на осаждение твердых аэрозольных частиц сфероидальной формы".

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 печатных работ, в том числе 8 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и 2 из базы данных Scopus, Web of Science. Из совместных работ в диссертацию включены результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы (171 наименование) и приложения. Общий объем диссертации 126 страниц машинописного текста.

1 Глава 1 Обзор литературы по термо- и фотофорезу крупных аэрозольных частиц и системе уравнений Навье-Стокса. Основные уравнения и краевые условия

1.1 Обзор литературы по термо- и фотофорезу крупных аэрозольных частиц

Твердые и жидкие частицы, находящиеся во взвешенном состоянии в газообразной среде, называются аэрозольными частицами [27, 34]. Аэрозольные частицы, входящие в состав реальных аэродисперсных систем, могут быть твердыми, летучими (если на их поверхности происходит испарение (сублимация) или конденсация), в случае отсутствия фазового перехода на их поверхности частицы называют нелетучими; кроме того, могут иметь сферическую, цилиндрическую, сфероидальную или произвольную форму поверхности.

По размерам аэрозольные частицы условно делятся на крупные, умеренно крупные и мелкие, для их классификации по размерам применяют критерий Кнудсена (K_n) [27, 34, 109]: если через $\tilde{\lambda}$ и R обозначить среднюю длину свободного пробега молекул газообразной среды и характерный размер, например радиус частицы, то в этом случае

$$K_n = \frac{\tilde{\lambda}}{R},$$

и частицы называются крупными, если $K_n \leq 0,01$, умеренно крупными при $0,01 \leq K_n \leq 0,3$ и мелкими при $K_n \geq 1$.

Впервые задача о поступательном движении крупной твердой частицы сферической формы в вязкой изотермической несжимаемой жидкости была рассмотрена Стоксом (1851 г.). Обозначив радиус сферы через R и рассмотрев ее движение в положительном направлении оси Oz со скоростью $\mathbf{U}$, им была получена формула для силы сопротивления (1.1) и для компонент массовой скорости и давления (1.2)

$$F_z = -6\pi R\mu_g\, U, \tag{1.1}$$

$$U_r(y,\theta) = -U\cos\theta\left(1 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y}\right), U_\theta(y,\theta) = U\sin\theta\left(1 - \frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y}\right),$$

$$U_\varphi(y,\theta)=0, \quad P_g(y,\theta)=P_\infty-\frac{\mu_g\,U}{R\,y^2}A_2\cos\theta, \tag{1.2}$$

где μ_g- динамическая вязкость жидкости, $U=|\mathbf{U}|$, $y=r/R$, U_r, U_θ, $U_\varphi-$ компоненты массовой скорости жидкости $\mathbf{U}_g$ в сферической системе координат (r,θ,φ), $A_1=1/2$, $A_2=-3/2$. Постоянные A_1, A_2 определяются из граничных условий на поверхности сферы (условия прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости).

Этот хорошо знакомый результат известен как закон сопротивления Стокса [125]. Отрицательный знак показывает, что сила, действующая со стороны жидкости на сферу, направлена противоположно движению последней; следовательно, жидкость препятствует движению частицы через нее. Чтобы поддерживать стационарное движение, необходимо постоянно прикладывать силу этой же самой величины к сфере в направлении ее движения. На практике это обычно осуществляется за счет действия на сферу, например, силы тяжести, фотофоретической силы, термофоретической силы и т.д.

Впервые задача обтекания сплюснутого сфероида потоком вязкой изотермической жидкости, параллельным его оси симметрии (ось Oz) со скоростью $\mathbf{U}$ была рассмотрена в работах Обербека, Сэмпсона и Пейна [167, 169, 168]. Выражение для силы сопротивления, действующая со стороны жидкости на сплюснутый сфероид в этом случае имеет вид (1.3) [125]:

$$F_z=-8\pi\mu_g\frac{c}{\lambda_0+(1-\lambda_0^2)\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0}\,U, \tag{1.3}$$

где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, здесь a, b – полуоси сфероида; $\lambda=\mathrm{sh}\,\tau$, здесь поверхность $\tau=\tau_0$ совпадает с поверхностью сплюснутого сфероида, τ,η,ϕ – система координат сплюснутого сфероида [125].

Формулу (1.3) обычно представляют через основные размеры сфероида a, b [125]:

$$F_z=-6\pi\mu_g aK\,U, \tag{1.4}$$

где $K=K(b/a)-$ поправка к закону Стокса, определяемая соотношением:

$$K=\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,[\lambda_0+(1-\lambda_0^2)\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0]}.$$

Аналогично, как и в случае сферы, ими были получены выражения для компонент массовой скорости и давления, которые равны:

$$U_\tau(\tau,\eta) = -\frac{U}{c\,\mathrm{ch}\,\tau H_\tau}\cos\eta\left\{A_1\left[\lambda - (1+\lambda^2)\,\mathrm{arcctg}\,\lambda\right] + A_2\lambda + A_3(1+\lambda^2)\right\},$$

$$U_\eta(\tau,\eta) = \frac{U}{cH_\tau}\sin\eta\left\{A_1\left(1-\lambda\,\mathrm{arcctg}\,\lambda\right) + \frac{A_2}{2} + A_3\lambda\right\},$$

$$U_\phi(\tau,\eta) = 0, \quad P_g(\tau,\eta) = P_\infty - \frac{\mu_g\,U}{H_\tau^4}c\left(x^2+\lambda^2\right)A_2\cos\eta, \tag{1.5}$$

где $A_3 = c^2$, $A_2 = -\dfrac{2\,c^2}{\lambda_0 + (1-\lambda_0^2)\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0}$, $A_1 = \dfrac{c^2\,(1-\lambda_0^2)}{\lambda_0 + (1-\lambda_0^2)\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0}$.

Заметим, что выражения (1.5) для компонент массовой скорости и давления для крупной частицы, имеющей форму сплюснутого сфероида, переходят в соответствующие выражения (1.2) для сферы, если выполнить предельный переход: $a = b$, $c \to 0$, $\lambda \to \infty$, $c\lambda = y$ [47] и использовать тот факт, что

$$\mathrm{arcctg}\,\lambda = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{3\lambda^3} + \frac{1}{5\lambda^5} + \ldots \quad (\lambda\ >\ 1).$$

В дальнейшем при описании поведения нагретой частицы, имеющей форму сплюснутого сфероида, мы часто будем пользоваться предельным переходом как к сфере, так и к сплюснутому сфероиду, температура поверхности которых незначительно отличается от температуры окружающей их газообразной среды, т.е. к формулам (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) и (1.5).

Описание движения аэрозольных частиц в термодинамических неравновесных системах является сложной математической задачей. Это связано с тем, что в газах движение конкретной частицы определяется как поверхностными явлениями (обусловленными непосредственным взаимодействием молекул газообразной среды с поверхностью частицы), так и с объемными эффектами, возникающими из-за неоднородного распределения гидродинамического и температурного полей в окрестности частицы [34].

Как правило, среднее расстояние между аэрозольными частицами у значительной части встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких системах учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знании законов динамики движения, тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц.

Аэрозольную частицу, радиус которой R много больше средней длины $\tilde{\lambda}$ свободного пробега молекул газообразной среды, окружает тонкий слой газа, толщина которого сравнима с длиной $\tilde{\lambda}$. Этот слой газа называют слоем Кнудсена [46, 58, ?, 109, 124, 128, 129, 138] и в нем происходит столкновение молекул. Молекул, вылетающих с поверхности частицы, с молекулами, летящими к ней. Задача о массо-и теплопереносе в слое Кнудсена может быть решена только с помощью математических методов кинетической теории газов. Вне слоя Кнудсена описание процессов тепло- и массопереноса можно проводить с помощью системы объемных уравнений газовой динамики, в которую в общем случае входят уравнения теплопроводности, диффузии, непрерывности и Навье-Стокса. Таким образом, слой Кнудсена позволяет разграничить всю область газа, окружающего частицу, на так называемую гидродинамическую и газокинетическую.

Если слой Кнудсена оказывает слабое влияние на тепло- и массоперенос, то такую частицу называют крупной. В настоящей работе рассматривается движение крупных твердых аэрозольных частиц со сфероидальной формой поверхности. При этом используется гидродинамический подход, т.е. решаются обычные уравнения газовой динамики, а краевые условия на поверхности частицы считаются заданными (берутся из газокинетического подхода, например, из работ [10, 11, 40, 46, 58, 106, 109, 112, 124, 128, 129, 138]). Поэтому в дальнейшем основной акцент в обзоре будет сделан на него. Следовательно, точность гидродинамического подхода в построении теории термо- и фотофореза аэрозольной частицы сфероидальной формы поверхности зависит от краевых условий на поверхности частицы, которые получаются из решения кинетического уравнения Больцмана. Поэтому краевые условия справедливы только в ситуации, для которой решено уравнение Больцмана.

На первом этапе развития теории движения аэрозольных частиц в неравновесных по температуре вязких газообразных средах строилась теория термо- и фотофореза при малых относительных перепадах температуры. Явления термо- и фотофореза были открыты экспериментально давно более 100 лет назад. Эффект термофореза в газовых смесях впервые наблюдал Джон Тиндаль в 1870 г. Суть этого явления в следующем. Помещая в газ, где с помощью внешних источников тепла поддерживается малый постоянный градиент температуры ∇T_∞, аэрозольную частицу, Д. Тиндаль обнаружил, что, несмотря на отсутствие объемных внешних сил, частица приходит в движение в направлении изменения температуры. Измерения показали, что скорость установившегося движения пропорциональна градиенту температуры, по крайней мере, для малых градиентов температуры, и направлена в ту же сторону, что и поток тепла, обусловленный теплопроводностью газа. Впервые гидродинамический метод был применен для построении теории термофореза крупных частиц сферической формы П. Эпштейном в 1929 г. [153]. Основываясь на максвелловской формуле для скорости теплового скольжения [161], он получил следующее выражение:

$$\mathbf{U_{th}} = -K_{TS}\frac{\nu_g}{\overline{T_g}}\frac{2\lambda_g/\lambda_p}{1+2\lambda_g/\lambda_p}\nabla T_\infty, \tag{1.6}$$

где K_{TS} – коэффициент теплового скольжения, равный 3/4 [161], $\overline{T_g}$ – средняя температура газа, ν_g – коэффициент кинематической вязкости, λ_g, λ_p – коэффициенты теплопроводности газа и частицы соответственно. Здесь и далее индексы g и p будем относить соответственно к газообразной среде и частице. Индексом S будем обозначать значения физических величин, взятых при средней относительной температуре частицы, равной T_S, а индексом ∞ – значения физических величин, характеризующих газообразную среду вдали от частицы.

Исследования показали, что формула Эпштейна дает заниженное значение скорости термофореза. Она плохо описывает экспериментальные результаты для частиц достаточно большой теплопроводности, не обнаруживает зависимости скорости от характера взаимодействия молекул газа с поверхностью частицы. Поэтому дальнейшие исследования были направлены не только на уточнение в этой формуле коэффициента теплового скольжения, но и на описание термофоретического движения частиц с не сферической формой поверхности (цилиндр, слабо деформированная сфера, сфероид, эллипсоид).

Было также обнаружено, что наряду с обычным ("положительным") термофорезом вблизи поверхности частицы наблюдается "отрицательный" термофорез [170].

В 1918 г. Эренхафт обнаружил (наблюдая за движением частиц пыли в луче мощной лампы), что некоторые частицы двигаются по направлению к источнику излучения — эффект, который нельзя объяснить действием светового давления, который всегда направленным от источника света. Открытый им эффект был назван фотофорезом. Движение частиц в направлении распространения света было названо положительным фотофорезом, движение в обратном направлении — отрицательным фотофорезом. В случае крупных сферических частиц, выражение для скорости фотофореза имеет следующий вид, например, [134]:

$$\mathbf{U_{ph}} = -K_{TS}\frac{\nu_g}{2\pi\lambda_p R^3\bigl(1+2\lambda_g/\lambda_p\bigr)T_\infty}\int\limits_V q_p\,\mathbf{r}\,dV, \tag{1.7}$$

где $\int\limits_V q_p\,\mathbf{r}\,dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников, V – объем частицы, R – радиус частицы, q_p – плотность тепловых источников, распределенных внутри частицы, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, отмечающий положение точек частицы, начало которого совпадает с центром масс частицы. Интегрирование в выражении (1.7) ведется по всему объему частицы.

Формула (1.7) позволяет при известном распределении по объему тепловых источников определить величину скорости фотофореза в случае малых относительных перепадов температуры. Направление и величина скорости фотофореза определяется величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников. Плотность тепловых источников при увеличении интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. Отсюда следует, что и скорость фотофореза с увеличением интенсивности возрастает линейно.

При постоянной величине дипольного момента увеличение радиуса частицы R приводит к уменьшению скорости фотофореза, которое происходит обратно пропорционально R^3. Видно также, что скорость фотофореза существенно зависит от теплопроводности вещества частицы. При $\lambda_p \to \infty$ скорость фотофореза, при фиксированной величине дипольного момента, стремится к нулю.

Дальнейшие исследования, как и в случае явления термофореза, были направлены на уточнение в формуле (1.7) — как распределяются тепловые источники по объему частицы (решение задачи МИ), описание фотофоретического движения частиц с несферической формой поверхности (цилиндр, сфероид, эллипсоид), например, работы [16, 17, 18, 42, 46, **?**, 76, 77, 82, 119, 121, 141, 157, 160, 163, 164] и т.д.

Большой вклад в развитие теории термофореза и фотофореза при малых относительных перепадах температуры внесла школа профессора Ю.И. Яламова, в частности, Е.Р. Щукин, М.Н. Гайдуков, И.Н. Ивченко, А.А. Юшканов, А.Б. Поддоскин, В.Б. Кутуков и др. [106, 109, 111, 132, 133, 136, 137, 138, 139, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147].

Развитие лазерных технологий и все более эффективное использование аэрозолей в науке, технике, производстве, народном хозяйстве, медицине и т.д. позволило рассматривать явления термо- и фотофореза при значительных относительных перепадах температуры в окрестности частицы, т.е. когда $\left(T_S - T_\infty\right)/T_\infty \sim 0(1)$. Впервые такие исследования были проведены в работах [61, 62]. Здесь исследовалось влияние нагрева поверхности на термо- и фотофорез крупных и умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы и был установлен существенно нелинейный характер зависимости силы и скорости термо- и фотофореза от средней температуры поверхности частицы. Аналогичные исследования были проведены для нагретой твердой частицы сфероидальной формы [66, 104].

Однако в работах [61, 62, 66, 104] не учитывалось влияние движения среды (конвективный член в уравнении теплопроводности) на силу и скорость термо- и фотофореза. В настоящей работе впервые строится математическая теория, позволяющая оценить влияние движения среды (учтен конвективный член в уравнении теплопроводности) на термо- и фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сфероидальной формы.

1.2 Обзор литературы по решению уравнений Навье-Стокса

Математическая теория течений деформируемой вязкой среды (газ, жидкость) — обширная и быстро развивающая часть гидро-, газо- и аэродинамики. Гидро- и газодинамика давно привлекала к себе внимание ученых разных специальностей, например [4, 5, 6, 22, 23, 24, 27, 28, 42, 53, 59, 96, 97, 102, 122, 125]. Сравнительная простота основных ее уравнений, наглядность экспериментов и четкая постановка математических задач вселяли надежду получить полное количественное описание динамических явлений, происходящих в жидких и газообразных средах. В действительности оказалось все намного сложнее.

Все началось с изучением потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости [8, 41, 56, 59, 97, 115, 116, 125]. Это был первый длительный этап. Набор таких течений оказался достаточно обширным. Математический аппарат опирался на теорию функций комплексного переменного и математические возможности их исследования – почти совершенными. Однако, полученные парадоксы, например, Эйлера–Даламбера в рамках теории идеальной жидкости указывали на необходимость создания более совершенной математической модели, реально отражающей действительность. Такая математическая модель была создана в начале 19 века и получила название "модель вязкой жидкости"с ее основными уравнениями Навье-Стокса.

Уравнения Навье-Стокса являются одними из важнейших в гидро- и газовой динамике и применяются при математическом моделировании многих как природных явлений, так и технических приложений. Если их дополнить массовыми силами, уравнениями переноса тепла и переноса массы, то такая система уравнений может описывать конвекцию, термодиффузию, поведение многокомпонентных смесей различных газов и жидкостей и т.п. Если же в качестве массовой силы ввести силу Лоренца и дополнить систему уравнениями Максвелла для поля в сплошной среде, то полученная математическая модель позволяет описывать явления электро- и магнитогидродинамики. В частности, такие математические модели успешно применяются при моделировании поведения плазмы и межзвездного газа. Различные вариации уравнений Навье-Стокса используются для описания движения воздушных масс атмосферы, в частности при формировании прогноза погоды и т.д.

Таким образом, уравнения Навье-Стокса – основные уравнения движения вязкой среды (газ, жидкость), представляющие математическое выражение законов сохранения импульса и массы. В векторном виде их можно представить следующим образом [56, 125]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \big(\mathbf{U} \cdot \nabla\big)\mathbf{U} = \nu \triangle \mathbf{U} - \frac{1}{\rho}\nabla P - \mathbf{f}, \;\; \mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{U}$ – векторное поле скоростей, t – время, ∇ – оператор набла, $\triangle$ – оператор Лапласа, ρ – плотность, P – давление, ν – коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{f}$ – векторное поле массовых сил. Неизвестные P и $\mathbf{U}$ являются функциями времени t и координаты $x \in \Omega$, где $\Omega \in R^n$, $n = 2, 3$ – двух- или трехмерная область, в которой движется жидкость.

Изначально усилия исследователей были направлены на отыскание точных решений системы уравнений Навье-Стокса. Например, для несжимаемой жидкости имеются известные точные решения для установившихся течений: в плоском канале при заданном постоянном перепаде давления (течение Пуазейля); между двумя параллельными плоскими стенками, одна из которых покоится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью (течение Куэтта); в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечением при постоянном перепаде давления (течение Хагена-Пуазейля) и т.д. Найдены также некоторые автомодельные решения, среди них плоскопараллельные и осесимметричные течения.

С чисто математических позиций уравнения Навье-Стокса, входящие в систему уравнений гидро - и газовой динамики, относятся к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно из наиболее неприятных их свойств (как указывалось выше)– нелинейность, обусловленная наличием конвективного члена ускорения $\big(\mathbf{U} \cdot \nabla\big)\mathbf{U}$ в левой части уравнения (1.8). Кроме того и сами краевые задачи для уравнений Навье-Стокса, описывающие течения вязкой несжимаемой среды (газ, жидкость), являются нелинейными. Традиционно эти факторы считаются главными препятствиями на пути построения решений уравнений Навье-Стокса.

Почти все точные решения не несут в себе специфики нелинейности задачи (соответствующие им нелинейные члены в уравнениях гидро- и газовой динамике равны нулю). В гидро- и газодинамике (с учетом того, что система уравнений нелинейна) были разработаны приближенные методы, позволяющие в той или иной мере упростить систему уравнений и приспособить их к характеру отдельных типов конкретных математических задач. Большинство таких задач о движении вязкой среды (газ, жидкость), имеющих тот или иной практический интерес, решено именно на основании приближенных уравнений движения вязкой среды с использованием методов теории возмущений (метод многих масштабов, метод сращиваемых асимптотических разложений, метод усреднения и т.д.) [28, 96]. Здесь следует в первую очередь отметить решения при малых числах Рейнольдса, соответствующие так называемым ламинарным течениям, среди которых наиболее известно течение Стокса около шара. Поскольку в диссертационной работе рассматривается этот случай, то в дальнейшем обзоре мы остановимся именно на нем.

Исследования краевых задач для стационарных уравнений Навье-Стокса в основном связаны с исследованием течений в замкнутых полостях, каналах, течений со свободными поверхностями, с обтеканием тел, течений в струях и следах за телами. При этом интегрирование уравнений Навье-Стокса проводится в областях (конечных или бесконечных), на границе которых ставятся условия из соображений физического характера (условия прилипания или скольжения на поверхности тел, вдува или отсоса на проницаемых поверхностях, условия внешнего потока вдали от обтекаемого тела, условия на свободной границе и др.).

Следует отметить, что между появлением уравнений Навье-Стокса и публикацией первых результатов о разрешимости краевых и начально-краевых задач для этих уравнений прошло более ста лет. Еще позже появились методы и средства численного решения этих задач. Поэтому на начальном этапе развития теории роль точных решений уравнений Навье-Стокса была особенно велика. В настоящее время их значение не исчерпано, тем более что само понятие точного решения существенно расширилось с развитием как аналитических, так и численных методов исследования дифференциальных уравнений. Точные решения являются незаменимым инструментом при тестировании численных методов, анализе сингулярностей в решениях уравнений Навье-Стокса. На их основе апробируются подходы к обоснованию приближенных моделей в динамике вязкой жидкости и газа.

Весомый вклад в развитие теории решений уравнений Навье-Стокса внесла О.А. Ладыженская и ее школа, одна из замечательных представителей петербургской математической школы [53, 54, 55]. Главным результатом Ладыженской в этой области было полное решение проблемы в двумерном случае (доказала однозначность разрешимости задачи). В трехмерном случае она получила частичные результаты: доказала однозначную разрешимость уравнений на конечном промежутке времени, а также решила общую задачу в предположении малости чисел Рейнольдса.

Вопрос о том, существуют ли решения уравнений Навье-Стокса, приобретает в настоящее время особую остроту в связи с расширением границ применимости уравнений Навье-Стокса [2, 7, 24, 31, 51, 56, 59, 92, 103, 105, 125, 149, 150, 154]. С математической точки зрения эта проблема заключается в определении поведения решений уравнений Навье-Стокса во всех точках трехмерного пространства в любой момент времени. Необходимо найти доказательство того, всегда ли решения уравнений Навье-Стокса существуют и как они ведут себя: физически реально, т.е. непрерывно с конечной скоростью или же физически невозможно – с разрывами, скачками, изломами и неограниченно возрастающей скоростью. Иными словами, требуется, используя математические рассуждения, представить убедительные доказательства того, что решения уравнений Навье-Стокса никогда не имеют расходимости.

Представители Математического института Клея (Clay Mathematics Institute) назвали семь нерешенных проблем тысячелетия. В их числе шестая, так называемая гидродинамическая проблема "О существовании и гладкости решений уравнений Навье-Стокса".

Следует особо выделить обзорную работу О.А. Ладыженской, опубликованную в журнале "Успехи математических наук" в 2003 году [55]. В этой работе подробно излагаются результаты по разрешимости начально-краевой задачи и задачи Коши для трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса, результаты по стационарным и по нестационарным задачам для системы Стокса и ее обобщений, о единственности и регулярности обобщенных решений уравнений Стокса, исследования в пространствах L_m, $L_{m,s}$ и пространствах Гельдера, а также, что должно быть сделано для решения шестой проблемы.

Задача обоснования единственности решений уравнений Навье-Стокса все еще остается центральной физико-математической проблемой гидро- и газодинамики. На разрешение проблемы направлены многочисленные исследования, результаты обсуждаются на специальных конференциях. Одновременно продолжающееся практическое использование уравнений Навье-Стокса, которое не очень сильно страдает от отсутствия ясности относительно единственности и аналитичности решений. Разработана обширная коллекция программных продуктов, позволяющих применять самые различные и востребованные на практике задачи вычислительной гидро- и газодинамики.

Как отмечалось выше, существует обширный класс гидро- и газодинамических течений, в которых можно пренебречь нелинейным членом. Сюда относят, например, течения с малыми скоростями, в которых инерционные члены $\left(\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}\right)$ малы. Если, например, в данной задаче L и U_∞ — характерные линейный размер и скорость, то отношение инерционных сил к вязким $\rho\mathbf{U}\cdot\nabla\mathbf{U}/\mu\triangle\mathbf{U}$ обычно описывается безразмерным параметром $\rho L U_\infty/\mu$, называемым числом Рейнольдса $\left(Re\right)$. Таким образом, при малых числах Рейнольдса можно пренебречь инерционными членами, в результате мы получаем систему уравнений, называемую в научной литературе **линеаризованными по скорости уравнениями Навье-Стокса**. Изучение решений линеаризованных по скорости уравнений Навье-Стокса представляет большой научный, практический, а также методологический интерес и позволяет развить математический аппарат, необходимый для исследования уже полной системы гидро- и газодинамических уравнений.

При использовании современных мощных лазеров в промышленности, медицине, сельском хозяйстве; при описании движения частиц в разнотемпературных каналах; при оценке скорости осаждения нагретых частиц; разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных примесей и т.д. мы сталкиваемся с ситуацией (как мы отмечали выше), когда средняя температура поверхности частиц, находящихся во взвешенном состоянии в газообразной среде, существенно отличается от температуры окружающего их газа. Здесь уже необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса и плотности газообразной среды от температуры. В этом случае при описании неизотермической газообразной среды мы получаем сложные нелинейные краевые задачи. Однако при определенных допущениях, оправданных, например, с физической точки зрения, можно получить аналитическое решение таких краевых задач. Например, в работах [65, 67] доказана теорема единственности краевой задачи для линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса в случае неизотермического обтекания равномерно нагретой сферы газообразной средой.

Проведенные в диссертации исследования показали, что и в случае частицы сфероидальной формы поверхности при определенном виде поиска решений компонент массовой скорости и допустимых с точки зрения физики упрощениях, линеаризованная по скорости система уравнений Навье-Стокса может быть сведена к однородному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка с регулярной особой точкой. Решение полученного дифференциального уравнения можно найти в виде обобщенных степенных рядов.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов является достаточно распространенным и хорошо апробированным методом. Однако основная трудность в данной постановке задачи при исследовании системы уравнений, описывающей поведение вязкой неизотермической газообразной среды, заключалась в следующем:

– уравнения Навье-Стокса, как было сказано выше, являются нелинейными уравнениями второго порядка в частных производных;

– в диссертации рассматривается неизотермическая вязкая газообразная среда. Это означает, что в уравнениях Навье-Стокса необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности вязкой среды от температуры. Для этого необходимо дополнительно решить конвективное уравнение теплопереноса, которое также является нелинейным;

– при описании свойств газообразной среды (как это следует из теоретических и экспериментальных данных) коэффициенты молекулярного переноса степенным образом зависят от температуры, т.е. представляют собой степенные функции, что приводит к большим математическим трудностям при нахождении решения линеаризованных по скорости уравнений Навье-Стокса и конвективного уравнения теплопроводности;

– как известно, геометрия задачи может существенно усложнить нахождение решения дифференциального уравнения. В диссертационном исследовании рассматривается сфероидальная система координат (эллипсоид вращения). В этой системе координат коэффициенты Ламэ зависят от двух переменных, что приводит к определенным математическим трудностям, в частности, при использовании метода разделения переменных при решении уравнений Навье-Стокса и конвективного уравнения теплопроводности.

Подводя итог, отметим следующее. В большинстве задач газовой динамики, динамики твердого тела, гидромеханики и других разделов физики (с которыми сталкиваются сегодня инженеры, физики и специалисты по прикладной математике) крайне редко оказывается возможным получить их точные решения — причиной этого, как отмечалось выше, служат обычно различного рода нелинейности, неоднородности или сложные граничные условия (нелинейные уравнения движения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы). Ключом к решению той или иной задачи является, как известно, построение ее математической модели. В процессе создания такой модели стараются принять во внимание одни особенности задачи, полностью пренебрегают другими и лишь в определенной степени учитывают третьи. Для осуществления этих важных шагов важно определить порядок величин различных элементов системы (т.е. насколько они велики или малы), сравнивая их друг с другом с заранее выбранными характерными элементами. Этот процесс называется приведением системы к безразмерному виду (теория подобия и размерности). Прежде чем пытаться проделать какие-либо аппроксимации необходимо прежде всего ввести безразмерные переменные и представить уравнения и краевые условия в безразмерной форме. Безразмерная форма выявляет наличие важных безразмерных параметров (комплексов), которые определяют поведение исследуемой системы. В данной диссертации на примерах нахождения решений линеаризованных по скорости уравнений Навье-Стокса, конвективного уравнения теплопроводности, а также двух физических приложений (термофорез, фотофорез) исследуются вышеобозначенные проблемы — решение краевых задач для стационарной системы уравнений вязкой неизотермической газообразной среды.

1.3 Постановка задач. Основные уравнения и краевые условия

В произвольной ортогональной системе координат (x^1, x^2, x^3) для квазистационарного случая общая система газодинамических уравнений [25, 31, 50, 51, 56, 97, 103, 105, 125, 127] включает в себя:

- линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial P_g}{\partial x^i} = \rho_g f^g_{x^i} + \frac{1}{H_i}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{H_1H_2H_3H_k}{H_k}\sigma_{ik}\right) - \frac{\sigma_{kk}}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}\right]; \qquad (1.9)$$

- уравнение непрерывности:

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i}\rho_g U^g_{x^i}\right) = 0; \qquad (1.10)$$

- уравнение конвективной теплопроводности и уравнение состояния:

$$\rho_g c_{pg}\left(\frac{U^g_{x^i}}{H_i}\frac{\partial T_g}{\partial x^i} =\right)\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^2}\lambda_g\frac{\partial T_g}{\partial x^i}\right); \qquad (1.11)$$

$$P_g = n_g k T_g, \qquad (1.12)$$

в которых через $U^g_{x^i}, f^g_{x^i}, \sigma_{ik}$ обозначены физические компоненты массовой скорости $\mathbf{U_g}$, силы $\mathbf{F}$ и тензора полных напряжений σ_{ik},

$$\sigma_{ik} = \mu_g\Bigg(\frac{1}{H_k}\frac{\partial U^g_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial U^g_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_iH_k}\left[U^g_{x^i}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} + U^g_{x^k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}\right] +$$

$$+2\delta_i^k\sum_{n=1}^{3}\frac{U^g_{x^n}}{H_iH_n}\frac{\partial H_i}{\partial x^n} - \frac{2}{3}\delta_i^k\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_n}U_{x^n}\right)\Bigg),$$

где H_i — коэффициенты Ламэ, k — постоянная Больцмана, P_g, T_g — давление и температура газообразной среды, $\rho_g = n_g m_g$ — плотность, n_g — концентрация, m_g — масса молекул вязкой среды, c_{pg} — удельная теплоемкость при постоянном давлении, μ_g — коэффициенты динамической вязкости, λ_g — теплопроводность газообразной среды.

К системе уравнений (1.9) – (1.12) необходимо добавить уравнение, описывающее распределение температуры внутри частицы. В случае твердой частицы оно имеет вид:

$$\mathrm{div}\left(\lambda_p \nabla T_p\right) = -q_p, \tag{1.13}$$

где $q_p(\mathbf{r})$– плотность внутренних источников тепла неоднородно распределенных в объеме частицы (в диссертационном исследовании считается заданной), λ_p– коэффициент теплопроводности частицы.

Наличие источников тепла внутри частицы можно связать, например, с протеканием объемной химической реакции; с процессом радиоактивного распада вещества частицы; поглощением электромагнитного излучения и т.д. Наличие источников тепла внутри частицы приводит к тому, что средняя температура ее поверхности может существенно отличаться от температуры окружающей газообразной среды вдали от нее. Возникающее при этом повышение температуры поверхности частицы оказывает влияние на теплофизические характеристики газа и тем самым на распределение полей скорости, давления и т.п. в ее окрестности, а в конечном итоге и на поведение частицы.

Уравнения (1.9) – (1.13) вместе с зависимостью коэффициентов теплопроводности ($\lambda_g = \lambda_g(T_g)$, $\lambda_p = \lambda_p(T_p)$), плотности ($\rho_g = \rho_g(T_g)$) и динамической вязкости ($\mu_g = \mu_g(T_g)$) от температуры, а также краевыми условиями полностью позволяют описать состояние вязкой неизотермической газообразной среды, т.е. определить давление, компоненты массовой скорости и температуры при неизотермическом течении вязкой газообразной среды.

В диссертационной работе при описании свойств неизотермической газообразной среды рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости, плотности и теплопроводности от температуры. Это основывается на методах статистической механики, термодинамики и кинетической теории газов [4, 5, 22, 25, 29, 37, 56, 98, 99, 117, 124, 128]:

$$\mu_g = \mu_\infty \left(\frac{T_g}{T_\infty}\right)^\beta, \ \rho_g = \rho_\infty \frac{T_\infty}{T_g}, \ \lambda_g = \lambda_\infty \left(\frac{T_g}{T_\infty}\right)^\alpha, \ \lambda_p = \lambda_* \left(\frac{T_p}{T_\infty}\right)^\omega, \tag{1.14}$$

где $\mu_\infty = \mu_g(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_g(T_\infty)$, $\lambda_\infty = \lambda_g(T_\infty)$, $\lambda_* = \lambda_p(T_\infty)$, $0,5 \le \alpha$, $\beta \le 1$ [22, 29, 37], $-1 \le \omega \le +1$ [37, 99, 117].

В нижеприведенных таблицах (в качестве примера) проведено сравнение значений динамической вязкости и теплопроводности, рассчитанных с помощью формул (1.14) с экспериментальными данными (обозначены звездочкой) для воздуха и азота [104, 121]. Аналогичным образом были проведены сравнения коэффициента теплопроводности для твердой частицы с экспериментальными данными [104, 121].

Приведенные численные оценки показывают, что выбор степенного вида зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры вида (1.14) является вполне оправданным и позволяет достаточно хорошо описать их изменение в широком интервале температур. Как видно из таблиц, относительная погрешность при этом не превышает $3 \div 6$ %.

Расчет коэффициентов динамической вязкости и теплопроводности для воздуха: $T_\infty = 273\ K$, $P_g = 1$ **атм**, $\lambda \cdot 10^{-3}$ **Вт/(м·К)**, $\mu \cdot 10^{-6}$ **Па · с,** $\alpha = 0.81$**,** $\beta = 0.72$

$T_g\,(K)$	μ_g	μ_*	%	λ_g	λ_*	%
273	17.2	17.2	0.00	24.4	24.4	0.00
300	18.5	18.4	0.54	26.2	26.3	0.38
400	23.0	22.6	1.74	33.8	33.2	1.78
500	27.0	26.6	1.48	40.7	39.8	2.21
600	30.6	30.3	0.98	46.9	46.2	1.49
700	33.9	33.9	0.00	52.4	52.3	0.19
800	37.0	37.3	0.81	57.3	58.3	1.75
900	39.8	40.6	2.01	62.0	64.1	3.39
1000	42.4	43.8	3.30	66.7	69.8	4.65
1100	44.9	46.9	4.45	71.5	75.4	5.45

Расчет коэффициентов динамической вязкости и теплопроводности для азота: $T_\infty = 273\ K$, $P_g = 1$ **атм**, $\lambda \cdot 10^{-3}$ **Вт/(м·К)**, $\mu \cdot 10^{-6}$ **Па · с**, $\alpha = 0.77$, $\beta = 0.69$

$T_g\,(K)$	μ_g	μ_*	%	λ_g	λ_*	%
273	16.7	16.7	0.00	24.3	24.3	0.00
300	17.9	17.8	0.56	25.9	26.1	0.77
400	22.1	21.7	2.71	32.7	32.6	0.31
500	25.8	25.4	1.55	38.9	38.7	0.51
600	29.1	28.8	1.03	44.6	44.6	0.00
700	32.1	32.0	0.31	49.9	50.2	0.60
800	34.9	35.1	0.57	54.8	55.6	1.46
900	37.6	38.0	1.06	59.7	60.9	2.01
1000	40.0	40.9	2.25	64.7	66.0	2.01
1100	42.3	43.7	3.31	70.0	71.1	1.57

В диссертационном исследовании при описании движения нагретой частицы в вязкой неизотермической газообразной среде используется сфероидальная система координат $(\tau,\ \eta,\ \phi)$, которая связана с декартовой системой координат соотношениями (1.15) в случае вытянутого сфероида и соотношениями (1.16) – в случае сплюснутого сфероида [1, 93, 94, 125]:

$$x = c\ \operatorname{sh}\tau\ \sin\eta\ \cos\phi,\ y = c\ \operatorname{sh}\tau\ \sin\eta\ \sin\phi,\ z = c\ \operatorname{ch}\tau\cos\eta, \tag{1.15}$$

$$x = c\ \operatorname{ch}\tau\ \sin\eta\ \cos\phi,\ y = c\ \operatorname{ch}\tau\ \sin\eta\ \sin\phi,\ z = c\ \operatorname{sh}\tau\cos\eta, \tag{1.16}$$

где $0 \le\ \tau\ < \infty$, $0 \le\ \eta\ \le \pi$, $0 \le\ \phi\ \le 2\pi$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ $(a\ <\ b)$ – в случае вытянутого сфероида, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a\ >\ b)$ – в случае сплюснутого сфероида, a и b — полуоси сфероида. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, что ось z совпадает с осью симметрии сфероида и направлена горизонтально. Фиксированное значение τ соответствует сфероидальной поверхности с общим центром, совпадающим с началом координат. Поэтому границе области Ω_p с заданными длинами полуосей a и b соответствует строго определенное значение координаты $\tau = \tau_0$, которое связано с полуосями a и b соотношением: $\tau_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$.

Как видно из выражений (1.15)—(1.16), если заменить λ на $i\lambda$ $(\lambda = \operatorname{sh}\tau)$ и c на $-ic$, то система координат сплюснутого сфероида переходит в систему координат вытянутого сфероида. Поэтому все дальнейшие выражения и вычисления проводятся в системе координат сплюснутого сфероида.

С учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (динамической вязкости, теплопроводности) и плотности среды от температуры (формулы (1.14)) мы получаем довольно сложную систему газодинамических уравнений, и, естественно, встает вопрос о методе решения этой нелинейной системы уравнений и о допущениях, оправданных, например, с физической точки зрения, которые нужно сделать для решения поставленных задач в диссертации. В диссертационном исследовании были сделаны следующие допущения.

Допущение 1. Все процессы, происходящие в системе частица–газ, рассматриваются в квазистационарном приближении. Указанное допущение относится ко всем главам диссертации.

Допущение 2. Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты ρ_∞, μ_∞, λ_∞ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины a, T_∞, U_∞. Здесь a – экваториальный радиус сфероида. Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации: число Рейнольдса $Re_\infty = \left(\rho_\infty a U_\infty\right)/\mu_\infty \ll 1$, тепловое число Пекле $Pe_\infty = \left(\rho_\infty c_{pg} U_\infty a\right)/\lambda_\infty \ll 1$ и $\zeta = a|\nabla T_g|/T_\infty \ll 1$ (малый параметр, характеризующий перепад температуры на размере частицы). Эти числа использовались в третьей и четвертой главах диссертации в качестве малого параметра. Здесь $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$– характерная скорость задачи.

Допущение 3. Движение частицы рассматривается при значительных (больших) относительных перепадах температуры. При описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости, плотности и теплопроводности от температуры: $\mu_g = \mu_\infty\left(\dfrac{T_g}{T_\infty}\right)^\beta$, $\rho_g = \rho_\infty\dfrac{T_\infty}{T_g}$, $\lambda_g = \lambda_\infty\left(\dfrac{T_g}{T_\infty}\right)^\alpha$ и $\lambda_p = \lambda_*\left(\dfrac{T_p}{T_\infty}\right)^\omega$, $\mu_\infty = \mu_g(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_g(T_\infty)$, $\lambda_\infty = \lambda_g(T_\infty)$, $\lambda_* = \lambda_p(T_\infty)$, $0,5 \le \alpha,\, \beta \le 1$, $-1 \le \omega \le +1$. Указанное допущение относится ко всем главам диссертации.

Допущение 4. Коэффициент теплопроводности частицы (λ_p) много больше коэффициента теплопроводности газа (λ_g), т.е. $\lambda_g \ll \lambda_p$ (справедливо для большинства газов). Предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры в системе «частица — газ». Это приводит к тому, что вязкость связана только с температурой $T_g^{(0)}(\tau)$, т.е. $\mu_g(T_g(\tau,\eta)) \approx \mu_g(T_g^{(0)}(\tau))$. При этом $T_g(\tau,\eta) = T_g^{(0)}(\tau) + \delta T_g(\tau,\eta)$, где $\delta T_g(\tau,\eta) \ll T_g^{(0)}(\tau)$; $T_g^{(0)}(\tau)$, $\delta T_g(\tau,\eta)$ определяются из решения тепловой задачи; τ, η, ϕ – сфероидальная система координат. Это допущение используется во второй главе диссертации.

Допущение 5. Частица образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом. Указанное допущение относится ко всем главам диссертации.

В сфероидальных координатах (τ,η,ϕ) линеаризованная по скорости система уравнений (1.9)—(1.13), с учетом симметрии по ϕ, принимает следующий вид:

$$\frac{\partial P_g}{\partial\tau} = \frac{\partial\sigma_{\tau\tau}}{\partial\tau} + \frac{\partial\sigma_{\tau\eta}}{\partial\eta} + \frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\tau}\Big(\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\eta\eta}\Big) +$$

$$+\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\tau}\Big(\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\phi\phi}\Big) + \sigma_{\tau\eta}\Big(\frac{2}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\eta} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\eta}\Big), \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial P_g}{\partial\eta} = \frac{\partial\sigma_{\eta\eta}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{\tau\eta}}{\partial\tau} - \frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\eta}\Big(\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\eta\eta}\Big) +$$

$$+\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\eta}\Big(\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\phi\phi}\Big) + \sigma_{\tau\eta}\Big(\frac{2}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\tau} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\tau}\Big), \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial U_\tau}{\partial\tau} + \Big(\frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\tau} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\tau}\Big)U_\tau + \frac{\partial U_\eta}{\partial\eta} +$$

$$+\Big(\frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\eta} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\eta}\Big)U_\eta = -\frac{1}{\rho_g H_\tau}\Big(U_\tau\frac{\partial\rho_g}{\partial\tau} + U_\eta\frac{\partial\rho_g}{\partial\eta}\Big), \tag{1.19}$$

где $U_\tau(\tau,\eta)$, $U_\eta(\tau,\eta)$ – компоненты векторного поля $\mathbf{U_g}$, $H_\tau = c\sqrt{\mathrm{ch}^2\tau - \sin^2\eta}$, $H_\phi = c\ \mathrm{ch}\tau\sin\eta$ – коэффициенты Ламэ в системе координат (τ,η,ϕ), $\sigma_{\tau\tau}$, $\sigma_{\tau\eta}$, $\sigma_{\eta\eta}$ и $\sigma_{\phi\phi}$ – компоненты тензора напряжений, которые определяются выражениями:

$$\sigma_{\tau\tau} = \frac{2\mu_g}{H_\tau}\left(\frac{\partial U_\tau}{\partial\tau} + \frac{1}{H_\tau}U_\eta\frac{\partial H_\tau}{\partial\eta} - \frac{H_\tau}{3}\left(\nabla,\mathbf{U_g}\right)\right),$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{2\mu_g}{H_\tau}\left(\frac{\partial U_\eta}{\partial\eta} + \frac{1}{H_\tau}U_\tau\frac{\partial H_\tau}{\partial\tau} - \frac{H_\tau}{3}\left(\nabla,\mathbf{U_g}\right)\right),$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{2\mu_g}{H_\tau}\left(\frac{1}{H_\phi}U_\tau\frac{\partial H_\phi}{\partial\tau} + \frac{1}{H_\phi}U_\eta\frac{\partial H_\phi}{\partial\eta} - \frac{H_\tau}{3}\left(\nabla,\mathbf{U_g}\right)\right),$$

$$\sigma_{\tau\eta} = \frac{\mu_g}{H_\tau}\left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \tau} + \frac{\partial U_\tau}{\partial \eta} - \frac{1}{H_\tau}U_\eta \frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} - \frac{1}{H_\tau}U_\tau \frac{\partial H_\tau}{\partial \eta}\right).$$

Аналогичным образом записываются уравнения (1.11) и (1.13):

$$\rho_g c_{pg} \left(U_\tau \frac{\partial T_g}{\partial \tau} + U_\eta \frac{\partial T_g}{\partial \eta}\right) =$$
$$= \frac{1}{H_\tau H_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\lambda_g H_\phi \frac{\partial T_g}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda_g H_\phi \frac{\partial T_g}{\partial \eta}\right)\right], \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{H_\tau^2 H_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(H_\phi \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(H_\phi \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \eta}\right)\right] = -q_p(\tau, \eta). \tag{1.21}$$

Приведем формулировку краевых задач и краевые условия, которые исследовались в диссертации.

Задача 1. Решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса с учетом степенного вида зависимости вязкости и плотности газообразной среды от температуры.

Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_p$ $(x \in \Omega_g)$, где Ω_p – сфероидальная область с центром в нуле евклидова пространства R^3. Требуется найти векторное поле скорости $\mathbf{U_g}(x)$ и скалярное поле давления $P_g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений (1.17) — (1.19).

Задача 2. Решение стационарного уравнения теплопроводности с учетом движения газообразной среды и степенного вида зависимости коэффициента теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры.

Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_p$ $(x \in \Omega_g)$, где Ω_p – сфероидальная область с центром в нуле евклидова пространства R^3. Требуется найти распределение поля температуры $T_g(\tau, \eta)$, удовлетворяющее уравнению (1.20) и краевому условию

$$\lim_{\tau \to \infty} T_g(\tau, \eta) = T_\infty. \tag{1.22}$$

Задача 3. Решение стационарного уравнения теплопроводности с учетом движения газообразной среды и степенного вида зависимости коэффициента теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры.

Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \backslash \Omega_p$ $(x \in \Omega_g)$, где Ω_p – сфероидальная область с центром в нуле евклидова пространства R^3. Требуется найти распределение поля температуры $T_g(\tau, \eta)$, удовлетворяющее уравнению (1.20) и краевому условию

$$\lim_{\tau \to \infty} (T_g(\tau, \eta) - |\nabla\ T_g| c \operatorname{sh} \tau \cos \eta) = T_\infty. \tag{1.23}$$

Задача 4. Влияние движения среды на термофорез нагретой крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы.

Математическая постановка задачи формулируется следующим образом. Крупная неравномерно нагретая твердая сфероидальная частица занимает ограниченную область Ω_p евклидова пространства R^3, в которой с помощью внешних источников поддерживается постоянный малый градиент температуры ∇T_g $(\nabla T_g \| Oz,\ Oz-$ направлена горизонтально). Требуется найти выражения, учитывающие влияние движения вязкой неизотермической газообразной среды, на силу $\mathbf{F_t}(\tau, \eta)$ и скорость $\mathbf{U_t}(\tau, \eta)$ термофореза, удовлетворяющие линеаризованной по скорости системе уравнений Навье-Стокса (1.17) — (1.19), системе уравнений (1.20) — (1.21), описывающей распределение поля температуры вне и внутри частицы и краевым условиям (1.24) — (1.31) в системе координат сплюснутого сфероида и провести качественные оценки влияния движения среды (учета конвективного члена в уравнении теплопроводности) на силу и скорость термофореза

$$\lim_{\tau \to \tau_0} U_\tau\left(\tau, \eta\right) = 0, \tag{1.24}$$

$$\lim_{\tau \to \tau_0} U_\eta\left(\tau, \eta\right) = \lim_{\tau \to \tau_0} \left(K_{ts} \frac{\mu_g\left(\tau, \eta\right)}{\rho_g\left(\tau, \eta\right) T_g\left(\tau, \eta\right) H_\tau\left(\tau, \eta\right)} \frac{\partial T_g\left(\tau, \eta\right)}{\partial \eta} \right), \tag{1.25}$$

$$\lim_{\tau \to \tau_0} T_g\left(\tau, \eta\right) = \lim_{\tau \to \tau_0} T_p\left(\tau, \eta\right), \tag{1.26}$$

$$- \lim_{\tau \to \tau_0} \left(\frac{\lambda_g\left(\tau, \eta\right)}{H_\tau\left(\tau, \eta\right)} \frac{\partial T_g\left(\tau, \eta\right)}{\partial \tau} \right) =$$

$$= - \lim_{\tau \to \tau_0} \left(\frac{\lambda_p\left(\tau, \eta\right)}{H_\tau\left(\tau, \eta\right)} \frac{\partial T_p\left(\tau, \eta\right)}{\partial \tau} + \sigma_0 \sigma_1 (T_p^4\left(\tau, \eta\right) - T_\infty^4) \right), \tag{1.27}$$

$$\lim_{\tau \to \infty} \left(U_\tau\left(\tau, \eta\right) - U_\infty \frac{c \operatorname{ch} \tau}{H_\tau\left(\tau, \eta\right)} \cos \eta \right) = 0, \tag{1.28}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(U_\eta(\tau,\eta)+U_\infty\frac{c\,\mathrm{sh}\,\tau}{H_\tau(\tau,\eta)}\sin\eta\right)=0, \qquad (1.29)$$

$$\lim_{\tau\to\infty}P_g=P_\infty\,,\ \lim_{\tau\to\infty}\left(T_g(\tau,\eta)-c|\nabla\ T_g|\,\mathrm{sh}\,\tau\cos\eta\right)=T_\infty\,, \qquad (1.30)$$

$$\lim_{\tau\to 0}T_p(\tau,\eta)<\infty\,, \qquad (1.31)$$

где σ_0 – интегральная степень черноты, σ_1 – постоянная Стефана-Больцмана, $U_\infty=|\mathbf{U}_\infty|$.

Задача 5. Влияние движения среды на фотофорез нагретой крупной аэрозольной частицы сфероидальной формы.

Математическая постановка задачи формулируется следующим образом. Крупная неравномерно нагретая твердая сфероидальная частица занимает ограниченную область Ω_p евклидова пространства R^3. До момента времени $t=0$ частица не облучается и находится в термодинамическом равновесии с газом; в момент $t>0$ на частицу падает плоская монохроматическая волна интенсивностью $\mathbf{I}$ $(\mathbf{I}\|Oz,\ Oz-$ направлена горизонтально). Требуется найти выражения, учитывающие влияние движения вязкой неизотермической газообразной среды, на фотофоретическую силу $\mathbf{F_p}(\tau,\eta)$ и скорость $\mathbf{U_p}(\tau,\eta)$ нагретой сфероидальной частицы, удовлетворяющие линеаризованной по скорости системе уравнений Навье-Стокса (1.17) — (1.19), системе уравнений (1.20) — (1.21), описывающей распределение поля температуры вне и внутри частицы и краевым условиям (1.32) — (1.39):

$$\lim_{\tau\to\tau_0}U_\tau(\tau,\eta)=0, \qquad (1.32)$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0}U_\eta(\tau,\eta)=\lim_{\tau\to\tau_0}\left(K_{ts}\frac{\mu_g(\tau,\eta)}{\rho_g(\tau,\eta)\,T_g(\tau,\eta)\,H_\tau(\tau,\eta)}\frac{\partial T_g(\tau,\eta)}{\partial\eta}\right), \qquad (1.33)$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0}T_g(\tau,\eta)=\lim_{\tau\to\tau_0}T_p(\tau,\eta)\,, \qquad (1.34)$$

$$-\lim_{\tau\to\tau_0}\left(\frac{\lambda_g(\tau,\eta)}{H_\tau(\tau,\eta)}\frac{\partial T_g(\tau,\eta)}{\partial\tau}\right)=$$

$$=-\lim_{\tau\to\tau_0}\left(\frac{\lambda_p(\tau,\eta)}{H_\tau(\tau,\eta)}\frac{\partial T_p(\tau,\eta)}{\partial\tau}+\sigma_0\sigma_1(T_p^4(\tau,\eta)-T_\infty^4)\right), \qquad (1.35)$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(U_\tau(\tau,\eta)-U_\infty\frac{c\,\mathrm{ch}\,\tau}{H_\tau(\tau,\eta)}\cos\eta\right)=0, \qquad (1.36)$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(U_\eta(\tau,\eta)+U_\infty\frac{c\,\mathrm{sh}\,\tau}{H_\tau(\tau,\eta)}\sin\eta\right)=0, \tag{1.37}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}P_g=P_\infty\,,\ \lim_{\tau\to\infty}T_g(\tau,\eta)=T_\infty\,, \tag{1.38}$$

$$\lim_{\tau\to 0}T_p(\tau,\eta)<\infty \tag{1.39}$$

и провести качественный анализ влияния движения среды (учета конвективного члена в уравнении теплопроводности) на силу и скорость фотофореза.

В краевых условиях на поверхности частицы при $\tau=\tau_0$ учтено: непротекание молекул газа через поверхность для нормальной компоненты U_τ и тепловое скольжение для касательной компоненты U_η; равенство температур и непрерывность радиального теплового потока с учетом излучения. Функция T_p, присутствующая в этих краевых условиях, находится из решения уравнения (1.21). В диссертационной работе не конкретизировалась природа тепловых источников q_p, что позволило перейти к общей постановке краевых задач и, следовательно, расширить прикладной характер полученных в конечном итоге формул.

Конечность физических величин, характеризующих частицу при $\tau\to 0$, учтена в (1.39). Вид краевых условий для функции T_g на бесконечности обусловлен двумя конкретными физическими задачами, которые в качестве приложения разработанного метода решения линеаризованной по скорости системы уравнений вязкой неизотермической газообразной среды рассмотрены в диссертации.

2 Глава 2. Решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса в виде обобщенных степенных рядов

2.1 Постановка задачи

Для нахождения решения линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса в качестве примера рассмотрим классическую задачу стационарного обтекания крупной твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы плоскопараллельным потоком газа со скоростью $\mathbf{U}_\infty$ ($\mathbf{U}_\infty \| Oz$), но не при малых относительных перепадах температуры как в [105], а при перепадах температуры, когда средняя температура поверхности частицы существенно отличается от температуры окружающей ее газообразной среды вдали от нее.

Задача 1. Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \backslash \Omega_p$ ($x \in \Omega_g$), где Ω_p – сфероидальная область с центром в нуле евклидова пространства R^3. Требуется найти векторное поле скорости $\mathbf{U_g}(x)$ и скалярное поле давления $P_g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial P_g}{\partial \tau} = \frac{\partial \sigma_{\tau\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial \tau}\Big(\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\eta\eta}\Big) +$$
$$+\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial \tau}\Big(\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\phi\phi}\Big) + \sigma_{\tau\eta}\Big(\frac{2}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial \eta}\Big), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial P_g}{\partial \eta} = \frac{\partial \sigma_{\eta\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}}{\partial \tau} - \frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial \eta}\Big(\sigma_{\tau\tau} - \sigma_{\eta\eta}\Big) +$$
$$+\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial \eta}\Big(\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\phi\phi}\Big) + \sigma_{\tau\eta}\Big(\frac{2}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial \tau}\Big), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} + \Big(\frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial \tau}\Big)U_\tau + \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} +$$
$$+\Big(\frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial \eta}\Big)U_\eta = -\frac{1}{\rho_g H_\tau}\Big(U_\tau\frac{\partial \rho_g}{\partial \tau} + U_\eta\frac{\partial \rho_g}{\partial \eta}\Big), \tag{2.3}$$

где $U_\tau(\tau,\eta)$, $U_\eta(\tau,\eta)$ – компоненты векторного поля $\mathbf{U_g}$, $H_\tau = c\sqrt{\mathrm{ch}^2\tau - \sin^2\eta}$, $H_\phi = c\ \mathrm{ch}\tau \sin\eta$ – коэффициенты Ламэ в системе координат (τ,η,ϕ) [125], $\sigma_{\tau\tau}$, $\sigma_{\tau\eta}$, $\sigma_{\eta\eta}$ и $\sigma_{\phi\phi}$ – компоненты тензора напряжений.

Описание обтекания будем проводить в сплюснутой сфероидальной системе координат (τ, η, ϕ), которая связана с декартовой соотношениями

$$x = c\ \operatorname{ch}\tau\ \sin\eta\ \cos\phi,\ y = c\ \operatorname{ch}\tau\ \sin\eta\ \sin\phi,\ z = c\ \operatorname{sh}\tau \cos\eta. \tag{2.4}$$

При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, что ось z совпадает с осью симметрии сфероида и направлена горизонтально. Это означает, что все неизвестные функции зависят только от координат τ и η.

Проведенные исследования показали, что выражения для компонент массовой скорости $\mathbf{U}_g$ удобно искать в виде

$$U_\tau(\tau,\eta) = \frac{U_\infty a^2}{c\ \operatorname{ch}\tau\, H_\tau} G(\tau)\cos\eta, \quad U_\eta(\tau,\eta) = -\frac{U_\infty a^2}{c\, H_\tau} g(\tau)\sin\eta. \tag{2.5}$$

Заметим, что a^2 введен здесь для удобства, чтобы выполнялась размерность компонент массовой скорости. Однако в дальнейшем его можно опустить, поскольку он не влияет ни на выражение дифференциального уравнения из которого определяется функция $G(\tau)$, ни на выражение для общей силы, действующей на частицу.

Поиск выражений для компонент массовой скорости в виде (2.5) позволяет, во-первых, свести систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений; во-вторых, освободиться от угловой зависимости искомых функций, сводя, в итоге, задачу к обыкновенному однородному дифференциальному уравнению третьего порядка для функции $G(\tau)$.

Из уравнения непрерывности (2.3) найдем связь между функциями $G(\tau)$ и $g(\tau)$, для этого введем новые переменные $\lambda = \operatorname{sh}\tau$ и $x = \cos\eta$:

$$\left(\frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\tau} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\tau}\right)U_\tau(\tau,\eta) = \frac{U_\infty}{c\ H_\tau}\ \lambda\ x\frac{2\lambda^2+x^2+1}{(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)}G(\lambda),$$

$$\left(\frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\eta} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\eta}\right)U_\eta(\tau,\eta) = -\frac{U_\infty}{c\ H_\tau}\ \frac{\lambda^2+2x^2-1}{\lambda^2+x^2}\ xg(\lambda),$$

$$\frac{\partial U_\tau(\tau,\eta)}{\partial\tau} = \frac{U_\infty}{cH_\tau}x\left(\frac{dG(\lambda)}{d\lambda} - \lambda\frac{2\lambda^2+x^2+1}{(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)}\ G(\lambda)\right),$$

$$\frac{\partial U_\eta(\tau,\eta)}{\partial\eta} = -\frac{U_\infty}{cH_\tau}x\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2+x^2}\ g(\lambda).$$

Учитывая допущения 3 и 4, имеем:

$$-\frac{1}{\rho_g}\left(U_\tau \frac{\partial \rho_g}{\partial \tau} + U_\eta \frac{\partial \rho_g}{\partial \eta}\right) = U_\tau \sqrt{1+\lambda^2} f(\lambda),$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{t_{g0}(\lambda)} \frac{dt_{g0}(\lambda)}{d\lambda}, t_{g0}(\lambda) = \frac{T_{g0}(\lambda)}{T_\infty}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2.3), получаем:

$$g(\lambda) = \frac{1}{2}\frac{dG(\lambda)}{d\lambda} - \frac{1}{2} f(\lambda) G(\lambda). \tag{2.6}$$

В дальнейшем нам потребуются компоненты тензора напряжений, выраженные через функцию $G(\tau)$, которые, с учетом формулы связи между функциями $G(\tau)$ и $g(\tau)$ (2.6), в сплюснутой сфероидальной системе координат принимают следующий вид:

$$\sigma_{\tau\tau} = \frac{c\mu_g U_\infty}{H_\tau^4} x\left(2\lambda^2 + x^2 + 1\right)\left[\frac{dG}{d\lambda} - \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{2\lambda^2 - x^2 + 3}{3(2\lambda^2 + x^2 + 1)} f\right) G\right],$$

$$\sigma_{\eta\eta} = -\frac{c\mu_g U_\infty}{H_\tau^4} x\left(1+\lambda^2\right)\left[\frac{dG}{d\lambda} - \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{\lambda^2 - 2x^2 + 3}{3(1+\lambda^2)} f\right) G\right],$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -\frac{c\mu_g U_\infty}{H_\tau^4} x\left(x^2+\lambda^2\right)\left[\frac{dG}{d\lambda} - \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1}{3} f\right) G\right], \tag{2.7}$$

$$\sigma_{\tau\eta} = -\frac{c\mu_g U_\infty}{H_\tau^4}\sqrt{(1+\lambda^2)(1-x^2)}\left[\frac{\lambda^2+x^2}{2}\frac{d^2G}{d\lambda^2} - \right.$$

$$\left. - \left(\lambda + \frac{\lambda^2+x^2}{2} f\right)\frac{dG}{d\lambda} + \left(\frac{\lambda^2 - x^2}{1+\lambda^2} + \lambda f - \frac{\lambda^2+x^2}{2} f'\right) G\right].$$

Подставляя в линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса (2.1)–(2.2) найденные выражения для компонент тензора напряжений, учитывая, что

$$\frac{\partial \sigma_{\eta\eta}}{\partial \eta} = \frac{c\mu_g U_\infty}{H_\tau^4}\sqrt{1-x^2}(1+\lambda^2)\left[\frac{\lambda^2 - 3x^2}{\lambda^2+x^2}\frac{dG}{d\lambda} - \left(2\lambda\frac{\lambda^2-3x^2}{(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\lambda^4 + 3\lambda^2 - x^2(9+9\lambda^2) + 2x^4}{3(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)} f\right) G\right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{\tau\eta}}{\partial \tau} = -\frac{c\mu_g U_\infty}{H_\tau^4}\sqrt{1-x^2}\left\{\frac{(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)}{2}\frac{d^3G}{d\lambda^3} - \left(\lambda\frac{3\lambda^2+4-x^2}{2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)}{2} f\right)\frac{d^2G}{d\lambda^2} + \left(\frac{3\lambda^4 + 3\lambda^2 - x^2(1+2\lambda^2) - x^4}{\lambda^2+x^2} + \right.$$

$$+\lambda\frac{3\lambda^2+4-x^2}{2}f-(\lambda^2+x^2)(1+\lambda^2)f'\Big)\frac{dG}{d\lambda}-$$

$$-\Big(\lambda\frac{3\lambda^4+2\lambda^2-x^4-x^2(6\lambda^2+6)}{(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)}+\frac{2\lambda^4+3\lambda^2-x^2(1+2\lambda^2)}{\lambda^2+x^2}f-$$

$$-\lambda\frac{3\lambda^2+4-x^2}{2}f'+\frac{(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)}{2}f''\Big)G+\frac{1+\lambda^2}{\mu_g}\frac{d\mu_g}{d\lambda}\Big[\frac{\lambda^2+x^2}{2}\frac{d^2G}{d\lambda^2}-$$

$$-\Big(\lambda+\frac{\lambda^2+x^2}{2}f\Big)\frac{dG}{d\lambda}+\Big(\frac{\lambda^2-x^2}{1+\lambda^2}+\lambda f-\frac{\lambda^2+x^2}{2}f'\Big)G\Big]\Big\},$$

$$\frac{1}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\eta}\left(\sigma_{\eta\eta}-\sigma_{\tau\tau}\right)=\frac{c\mu_gU_\infty}{H_\tau^4}x^2\frac{\sqrt{1-x^2}}{\lambda^2+x^2}\Big[\Big(3\lambda^2+x^2+2\Big)\frac{dG}{d\lambda}-$$

$$-\Big(2\lambda\frac{3\lambda^2+x^2+2}{1+\lambda^2}+\left(\lambda^2-x^2+2\right)f\Big)G\Big],$$

$$\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\eta}\left(\sigma_{\eta\eta}-\sigma_{\phi\phi}\right)=\frac{c\mu_gU_\infty}{H_\tau^4}x^2\sqrt{1-x^2}\Big[\frac{dG}{d\lambda}-(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}+f)G\Big],$$

$$\Big(\frac{2}{H_\tau}\frac{\partial H_\tau}{\partial\tau}+\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\tau}\Big)\sigma_{\tau\eta}=-\frac{c\mu_gU_\infty}{H_\tau^4}x^2\sqrt{1-x^2}\lambda\frac{3\lambda^2+x^2+2}{\lambda^2+x^2}\Big[\frac{\lambda^2+x^2}{2}\frac{d^2G}{d\lambda^2}-$$

$$-(\lambda+\frac{\lambda^2+x^2}{2}f)\frac{dG}{d\lambda}+(\frac{\lambda^2-x^2}{1+\lambda^2}+\lambda f-\frac{\lambda^2+x^2}{2}f')G\Big],$$

получаем

$$\frac{\partial P_g}{\partial\lambda}=\frac{c\mu_gU_\infty}{H_\tau^4}x\Big\{(1+\lambda^2)\frac{d^2G}{d\lambda^2}+\frac{\lambda^2+4x^2-3}{3}f\frac{dG}{d\lambda}-$$

$$-\Big(2+\frac{8}{3}\lambda f-\frac{\lambda^2+4x^2-3}{3}f'\Big)G+ \tag{2.8}$$

$$+\frac{2\lambda^2+x^2+1}{\mu_g}\frac{d\mu_g}{d\lambda}\Big[\frac{dG}{d\lambda}-\Big(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}+\frac{2\lambda^2-x^2+3}{3(2\lambda^2+x^2+1)}f\Big)G\Big]\Big\},$$

$$\frac{\partial P_g}{\partial x}=\frac{c\mu_gU_\infty}{H_\tau^4}\Big\{\frac{(\lambda^2+x^2)(1+\lambda^2)}{2}\frac{d^3G}{d\lambda^3}-$$

$$\Big[\lambda(1-x^2)+\frac{(\lambda^2+x^2)(1+\lambda^2)}{2}f\Big]\frac{d^2G}{d\lambda^2}-$$

$$-\Big[\lambda^2+x^2-\lambda(1-x^2)f+(\lambda^2+x^2)(1+\lambda^2)f'\Big]\frac{dG}{d\lambda}+$$

$$+\Big[2\lambda+\frac{4}{3}(\lambda^2-x^2)f+\lambda(1-x^2)f'-\frac{(\lambda^2+x^2)(1+\lambda^2)}{2}f''\Big]G+ \tag{2.9}$$

$$+\frac{1+\lambda^2}{\mu_g}\frac{d\mu_g}{d\lambda}\Big[\frac{\lambda^2+x^2}{2}\frac{d^2G}{d\lambda^2}-\Big(\lambda+\frac{\lambda^2+x^2}{2}f\Big)\frac{dG}{d\lambda}+$$

$$+\left(\frac{\lambda^2 - x^2}{1+\lambda^2} + \lambda f - \frac{\lambda^2 + x^2}{2} f^{'}\right) G \Bigg] \Bigg\}.$$

Освобождаясь от давления, вычитая из (2.8) выражение (2.9), предварительно продифференцировав первое уравнение по η, а второе по τ, в конечном итоге получаем следующее однородное дифференциальное уравнение третьего порядка для функции $G(\lambda) = G(\operatorname{sh}\tau)$:

$$\varphi_3(\lambda)\frac{d^3G}{d\lambda^3} + \varphi_2(\lambda)\frac{d^2G}{d\lambda^2} + \varphi_1(\lambda)\frac{dG}{d\lambda} + \varphi_0(\lambda)G = 0, \tag{2.10}$$

где

$$\varphi_3(\lambda) = \lambda(1+\lambda^2),$$

$$\varphi_2(\lambda) = -1 + \lambda^2 - \lambda(1+\lambda^2)f + \frac{1}{\mu_g}\frac{d\mu_g}{d\lambda}\frac{3\lambda}{2}(1+\lambda^2),$$

$$\varphi_1(\lambda) = -2\lambda + (1-\lambda^2)f - 2\lambda(1+\lambda^2)f^{'} + \lambda\frac{1+\lambda^2}{2\mu_g}\frac{d^2\mu_g}{d\lambda^2} +$$

$$+\frac{1}{\mu_g}\frac{d\mu_g}{d\lambda}\left(-1 + \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda(1+\lambda^2)f\right),$$

$$\varphi_0(\lambda) = 2 + (1-\lambda^2)f^{'} - \lambda(1+\lambda^2)f^{''} - \frac{1+\lambda^2}{2\mu_g}\frac{d^2\mu_g}{d\lambda^2}\left(\frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2} + \lambda f\right) -$$

$$-\frac{1}{\mu_g}\frac{d\mu_g}{d\lambda}\left(\lambda\frac{3\lambda^2+1}{1+\lambda^2} + (\lambda^2-1)f + \frac{3}{2}\lambda(1+\lambda^2)f^{'}\right),$$

здесь f', f'' – первая и вторая производные по λ от функции $f(\lambda) = \dfrac{1}{t_{g0}(\lambda)}\dfrac{dt_{g0}(\lambda)}{d\lambda}$.

Уравнение (2.10) получено для общего случая, когда зависимость динамической вязкости газообразной среды $\mu_g(t_g(\tau,\eta)) \approx \mu_g(t_{g0}(\tau))$ (т.е. при слабой угловой асимметрии распределения температуры (см. допущение 4)). Это уравнение в научной литературе получено впервые. Его важность заключается в том, что оно позволяет исследовать целый класс прикладных задач. Для этого необходимо лишь задать явный вид зависимости вязкости от температуры. Решать уравнение в общем случае мы не будем, т.к. это выходит за рамки данного диссертационного исследования.

В данной диссертационной работе рассмотрен частный случай, который реализуется для большинства газов при нормальных условиях, т.е. при описании свойств газообразной среды рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры (см. допущение 3).

Задача интегрирования линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с переменными коэффициентами сводится к подбору n или хотя бы $(n-1)$ линейно независимых частных решений. Однако частные решения легко подбираются лишь в исключительных случаях. В более сложных случаях частные решения ищут в виде суммы некоторого ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k(x)$, особенно часто в виде суммы степенного или обобщенного степенного ряда. Таким образом, решения линейного однородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами выше первого порядка, как правило, не выражаются через элементарные функции, и интегрирование такого уравнения не приводится к квадратурам. Наиболее употребительным приемом является представление искомого решения в виде степенного или обобщенного степенного ряда [3, 26, 35, 43, 49, 93, 94, 114, 123, 126]. Этот последний случай и будет нам интересен при нахождении решения линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса.

Ниже приведем краткую справку по решению обыкновенных дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов, которая нам потребуется в данной главе. Более полное описание ниже изложенной теории можно найти, например, в [43, 49, 93, 94, 114]. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(x-\xi\right)^{\nu} \, g_\nu(x) \; y^{(\nu)} = 0, \tag{2.11}$$

причем каждая из функций $g_\nu(x)$ может быть записана в виде степенного ряда:

$$g_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \, d_\nu^{(\mu)} \left(x-\xi\right)^{\mu}, \tag{2.12}$$

сходящего в некоторой определенной окрестности точки $x = \xi$; при этом $g_n(\xi) = d_0^{(n)} \neq 0$.

Согласно общей теории решения линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с помощью обобщенных степенных рядов, существует два метода решения таких уравнений.

Первый метод решения. Пусть r есть корень определяющего уравнения,

$$F(r) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} C_r^{\nu}\ \nu!\ g_{\nu}(\xi) = 0. \tag{2.13}$$

Подставляя выражение

$$y = \left(x-\xi\right)^r \sum_{\nu=0}^{\infty}\ c_{\nu}\left(x-\xi\right)^{\nu} \tag{2.14}$$

в дифференциальное уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при всех $\left(x-\xi\right)^k$, получаем

$$\sum_{\mu=0}^{k} c_{\mu} \sum_{\nu=0}^{n}\ C_{r+\mu}^{\nu}\ \nu!\ d_{k-\mu}^{(\nu)} = 0 \qquad (k=0,1,2,\ ...). \tag{2.15}$$

Выбрав $c_0 \neq 0$ произвольно, можно единственным образом определить последовательно из (2.15) все c_{μ}, если только определяющее уравнение не имеет решения, отличающегося от r на целое число. Если же имеется показатель, отличающийся от r на целое число, то вычислить c_{μ} возможно, если из всех показателей, отличающихся друг от друга на целое число, принять за r "наибольший"из них, т.е. такой, что ни одно из целых чисел $r+1,\ r+2,\ ...$ уже не является показателем. Эта осторожная формулировка нужна потому, что r может быть комплексным. Ряд (2.14) с найденными таким образом значениями для c_{μ} сходится в каждом круге, в котором все g_{ν} регулярны и $g_n \neq 0$, и в каждом таком круге (разрезанном вдоль выходящего из ξ луча) представляет решение данного дифференциального уравнения (2.11).

Если имеется несколько показателей, скажем $r_1,\ ...,\ r_m$ отличающихся друг от друга на целые числа, то с помощью только что найденного решения порядок уравнения (2.11) может быть понижен, а затем снова можно применять тот же самый метод. Если r_n упорядочены "по убыванию", т.е. так, что $r_1 - r_2 \geq 0$, ..., $r_{m-1} - r_m \geq 0$, то таким образом получается система независимых решений вида

$$y_{\mu} = \sum_{k=1}^{\mu} \left(x-\xi\right)^{r_k}\ \phi_{\mu,\mu-k}(x)\ ln^{\mu-k}\left(x-\xi\right) \qquad (\mu=1,\ ...,\ m), \tag{2.16}$$

где все ϕ – функции, регулярные в точке ξ.

Если ξ – регулярная точка уравнения, то решение не содержит логарифмических членов, даже если показатели будут $r = 0, 1, \ \dots, \ n-1$ и, следовательно, все будут отличаться друг от друга на целые числа. Более того, в этом случае каждое решение может быть разложено вблизи точки ξ в степенной ряд

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \ c_\nu \big(x-\xi\big)^\nu. \tag{2.17}$$

Второй метод решения (Фробениус). Отличие от изложенного выше метода состоит в том, что при составлении ряда

$$y = \big(x-\xi\big)^r \sum_{\nu=0}^{\infty} \ c_\nu \big(x-\xi\big)^\nu \tag{2.18}$$

не исходят из заранее найденного корня r определяющего уравнения (2.13).

Преимущество этого способа состоит в том, что не требуется применения редукционного метода и легче выяснить вид решения. Для простоты записи будем считать, что $\xi = 0$. Пусть в круге $|x| \ < \ \rho$ функции $g_\nu(x)$ регулярны и $g_n(x) \neq 0$. Положим,

$$F(r) = \sum_{\nu=0}^{n} C_r^\nu \ \nu! \ g_\nu(0) = 0, \tag{2.19}$$

$$c_0(r) = c(r)F(r+1) \ \dots \ F(r+N), \tag{2.20}$$

где $c(r)$ – аналитическая функция, регулярная и не обращающаяся в нуль в некоторой определенной окрестности каждого из корней многочлена $F(r)$, а N – наибольшая из всех целочисленных разностей между различными парами корней многочлена $F(r)$ (если ни одна из этих разностей не есть целое число, то $c_0 = c(r)$). Далее определим $c_k = c_k(r)$ из соотношений

$$c_1 F(r+1) + c_0 F(r) = 0,$$

$$c_2 F(r+2) + c_1 F_1(r+1) + c_0 F_2(r) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

где

$$F_k(r) = \sum_{\nu=0}^{n} \ C_r^\nu \ \nu! \ d_k^{(\nu)}. \tag{2.21}$$

Наконец, пусть

$$y(x,r) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r)\; x^k, \quad y_p(x,r) = \frac{\partial^p}{\partial r^p}\; y(x,r). \tag{2.22}$$

Эти ряды сходятся в круге при $|x| < \rho$. Если r_1 есть корень многочлена $F(r)$ и если $r_1, \; ..., r_m$ $(r_p - r_q \geq 0$ при $p < q)$ – те из корней, которые отличаются от r_1 на целые числа, то выражения

$$y_{p-1}(x,r_p) = x^{r_p} \sum_{q=0}^{p-1} C_{p-1}^{q}\; ln^{p-q-1}x \; \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(q)}(r_p) x^k \tag{2.23}$$

представляют собой систему линейно независимых решений. Если проделать это для всех корней уравнения $F(r) = 0$, то получится фундаментальная система решений. Решения (2.23) могут быть записаны также в виде выражений

$$y_{p-1}(x,r_p) = \sum_{q=0}^{p-1} x^{r_{q+1}} C_{p-1}^{q}\; ln^{p-q-1}x \; \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{k,q} x^k. \tag{2.24}$$

2.2 Использование обобщенных степенных рядов для получения аналитического решения линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса

В данном параграфе получено решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса с учетом степенного вида зависимости вязкости и плотности газообразной среды от температуры, которая соответствует задаче, описываемой системой уравнений (2.1) – (2.3) в системе координат сплюснутого сфероида (τ, η, ϕ).

Решать задачу (2.1) – (2.3) будем совместно с уравнениями

$$\rho_g c_{pg} \; \left(U_\tau \frac{\partial T_g}{\partial \tau} + U_\eta \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \right) =$$

$$= \frac{1}{H_\tau H_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\lambda_g H_\phi \frac{\partial T_g}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda_g H_\phi \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \right) \right], \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{H_\tau^2 H_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(H_\phi \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(H_\phi \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \eta} \right) \right] = -q_p(\tau, \eta). \tag{2.26}$$

Выражение для нулевого приближения поля температуры $t_{g0}\,(\lambda)$ будет получено в главе 3 в ходе решения стационарного уравнения теплопроводности

(2.25), удовлетворяющего соответствующим краевым условиям, которое имеет вид

$$t_{g0}(\lambda) = \left(1 + \gamma_0 \operatorname{arcctg} \lambda\right)^{\dfrac{1}{1+\alpha}}, \tag{2.27}$$

где γ_0 – постоянная интегрирования, определяемая из краевых условий на поверхности нагретой частицы.

Зная выражение для нулевого приближения поля температуры $t_{g0}(\lambda)$, с учетом допущений 3 и 4, зависимость вязкости газообразной среды от температуры принимает вид

$$\mu_g(\lambda) = \mu_\infty \left(1 + \gamma_0 \operatorname{arcctg}\lambda\right)^{\dfrac{\beta}{1+\alpha}}. \tag{2.28}$$

Подставив в уравнение (2.10) выражение (2.27) для температуры $t_{g0}(\lambda)$ и выражение (2.28) для вязкости, выполнив в нем замену $\lambda = 1/\nu$, в конечном итоге получаем следующее однородное дифференциальное уравнение третьего порядка для функции $\widetilde{G}(\nu) = G(1/\nu) = G(\operatorname{sh}\tau)$:

$$\psi_3(\nu)\frac{d^3\widetilde{G}}{d\nu^3} + \psi_2(\nu)\frac{d^2\widetilde{G}}{d\nu^2} + \psi_1(\nu)\frac{d\widetilde{G}}{d\nu} + \psi_0(\nu)\widetilde{G} = 0, \tag{2.29}$$

где

$$\psi_3(\nu) = \nu^3\left(1+\nu^2\right),$$

$$\psi_2(\nu) = \nu^2\left(5 + 7\nu^2 - \gamma_1\nu L\right),$$

$$\psi_1(\nu) = \nu\left(2 + 8\nu^2 - \left(2\gamma_1 + \frac{5\gamma_3 + \gamma_2\nu^2}{1+\nu^2}\right)\nu L + \gamma_4\frac{\nu^2L^2}{1+\nu^2}\right),$$

$$\psi_0(\nu) = -2 - \left(\gamma_5 + \gamma_6\nu^2\right)\frac{\nu L}{(1+\nu^2)^2} +$$

$$+\left(5\gamma_3 - \gamma_8 + (\gamma_3 - \gamma_7)\,\nu^2\right)\frac{\nu^2L^2}{(1+\nu^2)^2} - (2\gamma_3 - \gamma_9)\frac{\nu^3L^3}{(1+\nu^2)^2},$$

здесь введены обозначения $\gamma_1 = \dfrac{2-3\beta}{2(1+\alpha)}$, $\gamma_2 = \dfrac{1-\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_3 = \dfrac{1}{1+\alpha}$, $\gamma_4 = \dfrac{4(1+\alpha)+\beta(\beta-\alpha-4)}{2(1+\alpha)^2}$, $\gamma_5 = \dfrac{4+\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_6 = \dfrac{\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_7 = \dfrac{\beta}{(1+\alpha)^2}$, $\gamma_8 = \dfrac{-\beta(\beta-\alpha-4)}{(1+\alpha)^2}$, $\gamma_9 = \dfrac{-\beta(\beta-4\alpha-4)}{2\,(1+\alpha)^3}$, $L = \dfrac{\gamma_0}{1+\gamma_0\cdot\operatorname{arctg}\nu}$, $\gamma_0 = \dfrac{M_0}{c}$.

Заметим, что точка $\nu{=}0$ для уравнения (2.29) является регулярной особой точкой [3, 27, 43, 49, 116], поэтому решение однородного дифференциального уравнения можно искать с помощью обобщенных степенных рядов, разложив в степенные ряды функции $\psi_i(\nu), i = 0, 1, 2, 3$, входящие в уравнение (2.29).

Пусть

$$y_k(\nu) = \ell^k(\nu),\ \ \ell(\nu) = \frac{1}{1 + \gamma_0 \cdot \operatorname{arctg}\nu}. \tag{2.30}$$

Поскольку функция $\ell(\nu)$ меньше единицы, то мы можем записать

$$y_k(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(k)}}{n!}\nu^n,\ y_k^{'}(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\Delta_n^{(k)}}{n!}\nu^{n-1}. \tag{2.31}$$

Таким образом, получаем

$$-\frac{M_0}{c}k\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(k)}}{n!}\nu^n = \big(1+\nu^2\big)\big(1+\frac{M_0}{c}\operatorname{arctg}\nu\big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\Delta_n^{(k)}}{n!}\nu^{n-1}, \tag{2.32}$$

и, раскладывая функцию $\operatorname{arctg}\nu$ в ряд, имеем:

$$L^k(\nu) = \left(\frac{M_0}{c}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(k)}}{n!}\nu^n,\ \ k = 1, 2, 3,\ \ \Delta_0^{(k)} = 1, \tag{2.33}$$

$$\Delta_{n+1}^{(k)} = -\frac{M_0}{c}k\Delta_n^{(k)} - n(n-1)\Delta_{n-1}^{(k)} -$$

$$-\frac{(n+1)!}{n+1}\frac{M_0}{c}\Bigg(\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} b_m a_{n-2m}^k + \sum_{m=0}^{[\frac{n-2}{2}]} b_m a_{n-2m-2}^k\Bigg),$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{2n+1},\ a_n^k = \frac{n\Delta_n^{(k)}}{n!}.$$

В частности,

$$\Delta_1^{(k)} = -k\frac{M_0}{c},\ \ \Delta_2^{(k)} = \frac{M_0^2}{c^2}k(1+k), \tag{2.34}$$

$$\Delta_3^{(k)} = -k\frac{M_0}{c}\left(\frac{M_0^2}{c^2}(1+k)(3+k) - 2\right).$$

После разложения входящих в уравнение (2.29) функций в ряды, будем иметь уравнение

$$B_3(\nu)\frac{d^3\widetilde{G}}{d\nu^3} + B_2(\nu)\frac{d^2\widetilde{G}}{d\nu^2} + B_1(\nu)\frac{d\widetilde{G}}{d\nu} + B_0(\nu)\widetilde{G} = 0, \tag{2.35}$$

где

$$B_3(\nu) = \nu^3 \left(1+\nu^2\right),$$

$$B_2(\nu) = \nu^2 \left(5 + 7\nu^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^{(6)} \nu^{n+1}\right),$$

$$B_1(\nu) = \nu \left(2 + 8\nu^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Theta_{n-1}^{(2)} + \Theta_{n-2}^{(1)} - \Theta_n^{(7)}\right] \nu^{n+1}\right),$$

$$B_0(\nu) = -2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Theta_n^{(3)} + \Theta_{n-1}^{(4)} - \Theta_{n-2}^{(5)}\right] \nu^{n+1}.$$

Перемножая степенные ряды для функций, входящих в коэффициенты уравнения (2.29) и $L^k(\nu)$ ($k = 1,\ 2,\ 3$), получим следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов $\Theta_n^{(i)}$ ($i = 1,\ 2...7$):

$$\Theta_n^{(1)} = (5\gamma_3 - \gamma_2) \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \frac{\Delta_{n-2m}^{(1)}}{(n-2m)!},$$

$$\Theta_n^{(2)} = \gamma_4 \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \frac{\Delta_{n-2m}^{(2)}}{(n-2m)!},$$

$$\Theta_n^{(3)} = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m (m\gamma_6 - (m+1)\gamma_5) \frac{\Delta_{n-2m}^{(1)}}{(n-2m)!},$$

$$\Theta_n^{(4)} = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m ((4m+5)\gamma_3 - (m+1)\gamma_2 + m\gamma_7) \frac{\Delta_{n-2m}^{(2)}}{(n-2m)!},$$

$$\Theta_n^{(5)} = (2\gamma_3 - \gamma_9) \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m (m+1) \frac{\Delta_{n-2m}^{(3)}}{(n-2m)!},$$

$$\Theta_n^{(6)} = \gamma_1 \frac{\Delta_n^{(1)}}{n!},$$

$$\Theta_n^{(7)} = (2\gamma_1 + 5\gamma_3) \frac{\Delta_n^{(1)}}{n!},$$

через $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ обозначена целая часть числа $\dfrac{n}{2}$.

При этом нами были использованы следующие формулы перемножения рядов:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \nu^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \nu^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)\nu^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \nu^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \nu^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n-2k}\, b_k\right)\nu^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \nu^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \nu^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)\nu^{2n}.$$

Все ряды, стоящие в коэффициентах уравнения (2.35), сходятся при $\nu \in (0;1)$.

Видим, что в нашем случае уравнение может быть представлено следующим образом:

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu}\ g_{\nu}(x)\ y^{(\nu)} = 0, \tag{2.36}$$

причем каждая из функций $g_\nu(x)$ может быть записана в виде степенного ряда:

$$g_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} d_\nu^{(\mu)} x^{\mu}, \tag{2.37}$$

сходящегося в некоторой определенной окрестности точки $x = 0$; при этом $g_n(0) = d_0^{(n)} \neq 0$. Тогда, согласно общей теории решения однородных дифференциальных уравнений методом Фробениуса, решение уравнения (2.35) следует искать в виде (2.18).

Учитывая, что ν=0 – регулярная особая точка однородного уравнения (2.35), его решение ищем в виде обобщенного степенного ряда:

$$\widetilde{G} = \nu^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \nu^n, \quad C_0 \neq 0. \tag{2.38}$$

Вычисляя производные и, подставляя их в уравнение (2.35), приравнивая коэффициенты при $\nu^{n+\rho}$, получаем определяющее уравнение,

$$\rho^3 + 2\rho^2 - \rho - 2 = 0,$$

корни которого равны соответственно: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = -1$, $\rho_3 = -2$.

Найдем первое решение уравнения (2.35), соответствующее большему корню $\rho_1 = 1$:

$$\widetilde{G}_1(\nu) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1} \nu^n. \tag{2.39}$$

Подставляя выражение (2.39) в уравнение (2.35), методом неопределенных коэффициентов получаем рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов $C_{n,1}$:

$$C_{n,1} = -\frac{n-1}{n+3} C_{n-2,1} - \sum_{k=0}^{n-1} \Big[(n-k) \Big(\Theta^{(2)}_{k-1} + \Theta^{(1)}_{k-2} - \Theta^{(7)}_{k} - \\ - \Theta^{(6)}_{k} (n-k-1) \Big) + \Theta^{(3)}_{k} + \Theta^{(4)}_{k-1} - \Theta^{(5)}_{k-2} \Big] \frac{C_{n-k-1,1}}{n(n+2)(n+3)}.$$

Зная одно из решений, выполняя в уравнении (2.35) замену,

$$\widetilde{G}(\nu) = \widetilde{G}_1(\nu) \int \Phi(\nu)\, d\nu, \tag{2.40}$$

получим следующее однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,1} \nu^n \frac{d^2\Phi}{d\nu^2} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,2} \nu^n \frac{d\Phi}{d\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,3} \nu^n \Phi = 0, \tag{2.41}$$

где

$$\alpha_{n,1} = C_{n,1} + C_{n-2,1},$$

$$\alpha_{n,2} = (3n+8) C_{n,1} + (3n+4) C_{n-2,1} - \sum_{k=0}^{n-1} \Theta^{(6)}_{k} C_{n-k-1,1},$$

$$\alpha_{n,3} = (3n^2 + 13n + 12) C_{n,1} + n(3n+5) C_{n-2,1} + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\Theta^{(2)}_{k-1} + \\ + \Theta^{(1)}_{k-2} - 2(n-k)\Theta^{(6)}_{k} - \Theta^{(7)}_{k} \Big) C_{n-k-1,1}.$$

Система линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения (2.41) имеет вид:

$$\Phi_1(\nu) = \frac{1}{\nu^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2} \nu^n, \tag{2.42}$$

$$\Phi_2(\nu) = \frac{1}{\nu^4} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3} \nu^n + \omega_1 \ln \frac{\nu}{\nu_0}\ \Phi_1(\nu). \tag{2.43}$$

Подставляя (2.42) – (2.43) в уравнение (2.41), методом неопределенных коэффициентов получаем рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов $C_{n,i},\ i=2,\ 3$:

$$C_{n,2} = -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k-3)\,(k-4)\,\alpha_{n-k,1} + (k-3)\,\alpha_{n-k,2} + \alpha_{n-k,3}\right]C_{k,2},$$

$$C_{n,3} = -\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left[(k-4)(k-5)\alpha_{n-k,1} + (k-4)\alpha_{n-k,2} + \alpha_{n-k,3}\right]C_{k,3} + \right.$$
$$\left. + \omega_1\left[(2k-7)\alpha_{n-k-1,1} + \alpha_{n-k-1,2}\right]C_{k,2}\right\}.$$

При вычислении коэффициентов $C_{n,1}$ $(n \geq 1)$, $C_{n,2}$ $(n \geq 1)$ и $C_{n,3}$ $(n \geq 2)$ по приведенным выше рекуррентным соотношениям, необходимо учитывать, что

$$C_{0,1} = 1, \quad C_{0,2} = -2, \quad C_{0,3} = -3, \quad C_{1,3} = 1,$$
$$\omega_1 = -\frac{C_{0,3}}{C_{0,2}}\left(20\alpha_{1,1} - 4\alpha_{1,2} + \alpha_{1,3}\right).$$

Выбор постоянных $C_{0,1}$, $C_{0,2}$ и $C_{0,3}$ осуществляется так, чтобы функции $\widetilde{G}_1(\nu)$, $\widetilde{G}_2(\nu)$ и $\widetilde{G}_3(\nu)$ стремились к соответствующим функциям для эллипсоида вращения при малых относительных перепадах температуры.

Выполняя обратную замену, получим общее решение уравнения (2.35):

$$\widetilde{G}(\nu) = A_1\widetilde{G}_1(\nu) + A_2\widetilde{G}_2(\nu) + A_3\widetilde{G}_3(\nu)\,, \tag{2.44}$$

где

$$\widetilde{G}_1(\nu) = \nu\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1}\nu^n, \tag{2.45}$$

$$\widetilde{G}_2(\nu) = f_1(\nu)\,\widetilde{G}_1(\nu)\,, \tag{2.46}$$

$$\widetilde{G}_3(\nu) = \left(f_2(\nu) + \omega_1 f_3(\nu) + \omega_1 f_1(\nu)\ln\frac{\nu}{\nu_0}\right)\widetilde{G}_1(\nu)\,, \tag{2.47}$$

здесь

$$f_1(\nu) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{C_{n,2}}{n-2}\nu^{n-2} - \frac{C_{0,2}}{2\nu^2} - \frac{C_{1,2}}{\nu} + C_{2,2}\ln\nu, \tag{2.48}$$

$$f_2(\nu) = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{C_{n,3}}{n-3}\nu^{n-3} - \frac{C_{0,3}}{3\nu^3} - \frac{C_{1,3}}{2\nu^2} - \frac{C_{2,3}}{\nu} + C_{3,3}\ln\nu, \tag{2.49}$$

$$f_3(\nu) = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{C_{n,2}}{(n-2)^2}\nu^{n-2} - \frac{C_{0,2}}{4\nu^2} - \frac{C_{1,2}}{\nu} - \frac{C_{2,2}}{2}\ln^2\nu. \tag{2.50}$$

Заметим, что функция $\widetilde{G}(\nu)$ удовлетворяет уравнению (2.35) по построению. Ряды, определяющие функции $\widetilde{G}_i(\nu)$, $i = 1, 2, 3$ равномерно сходятся при $\nu \in (0,\ 1)$ [74].

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема. Общее решение уравнения (2.35) имеет вид (2.44), где коэффициенты $A_1,\ A_2,\ A_3$ – произвольные постоянные, функции $\widetilde{G}_1(\nu)$, $\widetilde{G}_2(\nu)$, $\widetilde{G}_3(\nu)$ задаются формулами (2.45) – (2.47).

Зная общее решение уравнения (2.35) и связь между функциями $G(\nu)$ и $g(\nu)$ (2.6), получаем выражения для компонент векторного поля $\mathbf{U_g}(x)$ и скалярной функции давления $P_g(x)$.

Поле давления, которое нам потребуется в 3 и 4 главах, найдем из уравнения (2.9) для импульса. Умножая его на dx, после интегрирования получаем:

$$\begin{gathered}
P_g(\lambda, x) = P_\infty + \frac{\mu_g U_\infty a^2}{c^3}\Bigg\{\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\frac{d^3G}{d\lambda^3} - \Bigg[\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\frac{x}{\lambda^2+x^2} + \\
+ \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda} + \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} f \operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\Bigg]\frac{d^2G}{d\lambda^2} - \Bigg[\frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda} - \\
- \left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\frac{x}{\lambda^2+x^2} + \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right) f + \frac{1+\lambda^2}{\lambda} f' \operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\Bigg]\frac{dG}{d\lambda} + \\
+ \Bigg[\frac{x}{\lambda(\lambda^2+x^2)} + \frac{1}{\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda} + \frac{4}{3}\frac{x}{\lambda^2+x^2} f + \left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\frac{x}{\lambda^2+x^2} + \right. \\
\left. + \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right) f' - \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} f'' \operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\Bigg] G + \frac{1+\lambda^2}{\mu_g}\frac{d\mu_g}{d\lambda}\Bigg[\frac{1}{2\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\frac{d^2G}{d\lambda^2} - \\
- \left(\frac{x}{2\lambda(\lambda^2+x^2)} + \frac{1}{2\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} f \operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right)\frac{dG}{d\lambda} + \\
+ \left(\frac{x}{(1+\lambda^2)(\lambda^2+x^2)} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{x}{\lambda^2+x^2} + \frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right) f - \frac{1}{2\lambda} f' \operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right) G\Bigg]\Bigg\},
\end{gathered} \tag{2.51}$$

При получении выражения (2.51) необходимо учитывать, что

$$\int \frac{\lambda^2+x^2}{H_\tau^4}dx = \frac{1}{\lambda c^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda},$$

$$\int \frac{1-x^2}{H_\tau^4}dx = \frac{1}{c^4}\left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda^2(\lambda^2+x^2)}x + \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right),$$

$$\int \frac{dx}{(\lambda^2+x^2)^2} = \frac{x}{2\lambda^2(\lambda^2+x^2)} + \frac{1}{2\lambda^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda},$$

$$\int \frac{x^2}{(\lambda^2+x^2)^2}dx = -\frac{x}{2(\lambda^2+x^2)} + \frac{1}{2\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda},$$

$$\int \frac{x^4}{(\lambda^2+x^2)^2}dx = x + \frac{\lambda^2 x}{2(\lambda^2+x^2)} - \frac{3}{2}\lambda\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda},$$

$$\int \frac{\lambda^2-x^2}{H_\tau^4}dx = \frac{1}{c^4}\frac{x}{\lambda^2+x^2}.$$

Таким образом, чтобы получить явное выражение для поля давления, необходимо знать функцию $G(\lambda)$, которая определяется из решения линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса. Заметим, что в случае малых относительных перепадов температуры выражение для поля давления принимает следующий вид:

$$P_g(\lambda,x) = P_\infty + \frac{\mu_g U_\infty}{c^3}\left\{\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\frac{d^3G}{d\lambda^3} - \left[\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\frac{x}{\lambda^2+x^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right]\frac{d^2G}{d\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\frac{dG}{d\lambda} + \left[\frac{x}{\lambda(\lambda^2+x^2)} + \frac{1}{\lambda^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\lambda}\right]G\right\}, \quad (2.52)$$

и если в это выражение подставить известное для сплюснутого сфероида выражение функции $G(\lambda)$ [125],

$$G(\lambda) = C_2\lambda + \left[\lambda - (1+\lambda^2)\operatorname{arcctg}\lambda\right]C_1 + c^2(1+\lambda^2), \quad (2.53)$$

то получаем

$$P_g(\lambda,x) = P_\infty + \frac{\mu_g U_\infty}{H_\tau^4}x\left(\lambda^2+x^2\right)C_2. \quad (2.54)$$

Выражение (2.54) в точности совпадает с выражением для поля давления твердой частицы, имеющей форму поверхности сплюснутого сфероида при малых относительных перепадах температуры.

Результаты главы 2 сформулированы в виде следствия из теоремы.

Следствие. Найдены компоненты векторного поля $\mathbf{U_g}(x)$ и скалярной функции давления $P_g(x)$ в области $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_p$ $(x \in \Omega_g)$, удовлетворяющие системе уравнений (2.1) - (2.3) при заданной зависимости вязкости газообразной среды от температуры (2.28). Выражение для поля давления определяется формулой (2.51). Компоненты векторного поля имеют вид:

$$U_\tau(\tau,\eta) = \frac{U_\infty a^2}{c \text{ ch } \tau \, H_\tau}\left[A_1 G_1(\lambda) + A_2 G_2(\lambda) + A_3 G_3(\lambda)\right] \cos\eta, \tag{2.55}$$

$$U_\eta(\tau,\eta) = -\frac{U_\infty a^2}{c \, H_\tau}\left[A_1 G_4(\lambda) + A_2 G_5(\lambda) + A_3 G_6(\lambda)\right] \sin\eta, \tag{2.56}$$

где $G_4(\lambda) = \dfrac{1}{2}\Big(G_1'(\lambda) - f(\lambda) G_1(\lambda)\Big)$, $G_5(\lambda) = \dfrac{1}{2}\Big(G_2'(\lambda) - f(\lambda) G_2(\lambda)\Big)$, $G_6(\lambda) = \dfrac{1}{2}\Big(G_3'(\lambda) - f(\lambda) G_3(\lambda)\Big)$, коэффициенты $A_1,\ A_2,\ A_3$ – произвольные постоянные, функция $G(\lambda) = \widetilde{G}(\nu)$ задается формулой (2.44).

Общая сила, действующая на сфероид, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и имеет вид [56]

$$F_z = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\big(-P_g + \sigma_{\tau\tau}\cos\tau - \sigma_{\tau\eta}\frac{\text{sh}\,\tau}{\text{ch}\,\tau}\sin\eta\big) c^2 \,\text{ch}^2\tau \sin\eta \, d\eta d\phi\Big|_{\tau=\tau_0}, \tag{2.57}$$

где $\sigma_{\tau\tau}$, $\sigma_{\tau\eta}$ – компоненты тензора напряжений, которые определяются следующими выражениями:

$$\sigma_{\tau\tau} = \frac{2\mu_g}{H_\tau}\left(\frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} + \frac{1}{H_\tau} U_\eta \frac{\partial H_\tau}{\partial \eta} - \frac{H_\tau}{3}\left(\nabla, \mathbf{U_g}\right)\right),$$

$$\sigma_{\tau\eta} = \frac{\mu_g}{H_\tau}\left(\frac{\partial U_\eta}{\partial \tau} + \frac{\partial U_\tau}{\partial \eta} - \frac{1}{H_\tau} U_\eta \frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} - \frac{1}{H_\tau} U_\tau \frac{\partial H_\tau}{\partial \eta}\right),$$

здесь $H_\tau = c\sqrt{\text{ch}^2\tau - \sin^2\eta}$, $H_\phi = c\ \text{ch}\tau\sin\eta$ – коэффициенты Ламэ в системе координат (τ,η,ϕ).

При малых относительных перепадах температуры в окрестности аэрозольной частицы сфероидальной формы после интегрирования общая сила, определяется из выражения

$$F_z = -4\pi\frac{\mu_e U_\infty}{c} A_2, \tag{2.58}$$

где коэффициент A_2 находится из краевых условий для компонент массовой скорости на поверхности частицы при малых относительных перепадах температуры.

Зная выражения для скалярной функции давления, компонент массовой скорости, мы можем определить выражение для общей силы, действующей на неравномерно нагретую частицу сфероидальной формы при значительных перепадах температуры в окрестности частицы. После подстановки выражений (2.55), (2.56), (2.51) в формулу (2.57) и интегрирования по поверхности частицы, имеем:

$$F_z = -\frac{\pi\mu_\infty U_\infty a^2}{c}\left(1+\lambda_0^2\right)^2\Big[A_1N_1(\lambda_0)+A_2N_2(\lambda_0)+A_3N_3(\lambda_0)\Big], \tag{2.59}$$

где коэффициенты A_1, A_2, A_3 – произвольные постоянные, функции $N_i(\lambda)$, $i=1,2,3$ определяются формулой

$$\begin{aligned}
N_i(\lambda) = \Bigg[&\left(-1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)G_i'''(\lambda)-\frac{1}{\lambda}\Bigg(1+\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda+\\
&+\lambda\left(-1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)f(\lambda)\Bigg)G_i''(\lambda)+\Bigg(\frac{2}{1+\lambda^2}\left(1-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)+\\
&+\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)f(\lambda)-2\left(-1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)f'(\lambda)\Bigg)G_i'(\lambda)-\\
&-\frac{2}{\lambda(1+\lambda^2)}\Bigg(\frac{\lambda^2-1}{1+\lambda^2}-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda-\frac{1+\lambda^2}{2}\left(1+\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)\mathrm{f}'(\lambda)+\\
&+\frac{1+\lambda^2}{2}\lambda\left(-1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)f''(\lambda)\Bigg)G_i(\lambda)\Bigg]t_{g0}^{\beta}(\lambda)-\\
&-\frac{\mu_g'(\lambda)}{\mu_\infty(\lambda)}\Bigg(\left(\left(1-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)G_i''(\lambda)+\frac{1}{\lambda}\Bigg(1+\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda+\right.\\
&+\lambda\left(-1+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)f(\lambda)\Bigg)G_i'(\lambda)-\frac{4}{1+\lambda^2}\Big(1-\lambda\mathrm{arcctg}\lambda+\\
&+\frac{1+\lambda^2}{4\lambda}\left(1+\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)f(\lambda)+\\
&+\frac{1+\lambda^2}{4}\left(1-\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\mathrm{arcctg}\lambda\right)f'(\lambda)\Big)G_i(\lambda)\Bigg).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Здесь $f(\lambda)=\dfrac{1}{t_{g0}(\lambda)}\dfrac{dt_{g0}(\lambda)}{d\lambda}$, $\mu_g(\lambda)=\mu_\infty\Big(1+\gamma_0\mathrm{arcctg}\lambda\Big)^{\dfrac{\beta}{1+\alpha}}$.

Таким образом, в главе 2 построено в явном виде решение задачи 1 для системы уравнений (2.1) – (2.3), т.е. найдено нулевое приближение для внутреннего разложения. Зная нулевые приближения, можно построить, следуя стандартной процедуре сращивания [154], и более высокие приближения уравнения

$$\rho_g \sum_{j=1}^{3} U_j \nabla_j U_k = -\nabla_k P_g + \sum_{j=1}^{3} \nabla_j \left[\mu_g \left(\nabla_j U_k + \nabla_k U_j - \frac{2}{3} \delta_{jk} (\nabla, \mathbf{U_g}) \right) \right],$$

$$k = 1, 2, 3. \tag{2.61}$$

3 Глава 3. Особенности конвективного теплообмена крупных нагретых аэрозольных частиц сфероидальной формы в вязких неизотермических газообразных средах

В этой главе приведены некоторые известные факты из теории решения дифференциальных уравнений, описывающих перенос теплоты (вещества) в газообразных средах, и получено решение стационарного конвективного уравнения переноса тепла с учетом степенного вида зависимости коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры.

Явления переноса это неравновесные процессы, которые происходят в физической системе — пространственный перенос энергии, вещества, энтропии, импульса или какой-либо другой физической величины. Причиной такого переноса являются возмущения, нарушающие состояние термодинамического равновесия. Например, наличие пространственных неоднородностей температуры, состава или средней скорости движения частиц системы. Перенос физической величины происходит в направлении, обратном ее градиенту, в результате чего изолированная от внешних воздействий система приближается к состоянию термодинамического равновесия. Явления переноса протекают стационарно, если внешние воздействия поддерживаются постоянными.

При взаимодействии конденсированных сред, у которых различные температуры, происходит обмен энергией. Интенсивность движения частиц среды существенно зависит от ее температуры. Например, если температура тела, имевшего меньшую температуру, увеличивается, то интенсивность движения частиц тела с более высокой температурой уменьшается. Вследствие такого взаимодействия одно из тел остывает, а другое тело нагревается. Перенос теплоты есть перенос энергии. Поток энергии, который передается частицами тела с более высокой температурой частицам тела с более низкой температурой в литературе принято называть тепловым потоком. Таким образом, для того чтобы возник тепловой поток, т.е. возник процесс теплообмена между различными областями пространства, заполненного вещественной средой, необходимо и достаточно, чтобы в этих областях имели место разные температуры. Перенос энергии осуществляется носителями вещественной системы. Это могут быть атомы, вихревые образования, молекулярные комплексы, гидродинамические потоки и т.д.

Значимость процесса теплообмена в производстве, природе и т.д. определяется тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое, в свою очередь, само определяется условиями теплообмена. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества, механические, тепловые, магнитные и другие свойства тел. Именно этим и объясняется интенсивное развитие теории теплообмена и то исключительно важное значение, которое ей уделяется в авиастроении, медицине, энергетике, сельском хозяйстве, химической технологии и природе.

Как правило, перенос теплоты (вещества) в твердых телах, жидкостях и газах подчиняется условно принятым линейным зависимостям. Например, перенос теплоты – закону Фурье: плотность теплового потока (удельный тепловой поток) пропорционален температурному градиенту; молекулярный перенос вещества – закону диффузии Фика: плотность потока вещества пропорциональна градиенту концентраций (разности диффузионных химических потенциалов). На основании этих линеаризованных законов выводятся соответствующие дифференциальные уравнения.

Нас будет интересовать в первую очередь так называемый конвективный теплообмен. Под *конвективным теплообменом* понимается необратимый процесс переноса теплоты, происходящий в движущихся средах (газ, жидкость) с неоднородным полем температуры и обусловленный совместным действием двух механизмов переноса тепла — собственно конвективного переноса и теплопроводности. Следовательно, в случае конвективного теплообмена распространение тепла в пространстве осуществляется за счет переноса тепла при перемещении текучей среды из области с более высокой температурой в область с меньшей температурой, а также за счет теплового движения микрочастиц и обмена кинетической энергией между ними.

Фундаментальные уравнения переноса основаны на универсальных уравнениях переноса: сохранения массы, сохранения количества движения (импульса) и сохранения энергии. Закон сохранения энергии тождественен первому закону термодинамики и выражается уравнением энергии [56, 125], которое в случае несжимаемой вязкой среды можно записать в виде

$$\rho_g c_{pg}\left(\frac{\partial T_g}{\partial t} + \big(\mathbf{U}_g\nabla\big)T_g\right) = \operatorname{div}\left(\lambda_g \nabla T_g\right) + \Phi + Q, \qquad (3.1)$$

где $\mathbf{U}_g$ – скорость среды, Φ – диссипативная функция, учитывающая нагрев среды за-за внутреннего трения, t – текущее время, Q – внутреннее тепловыделение в единице объема среды, T_g – температура газообразной среды, ρ_g – плотность, c_{pg} – удельная теплоемкость при постоянном давлении, λ_g – теплопроводность газообразной среды.

Для решения уравнения (3.1) необходимо знать краевые условия, а также в случае зависимости процесса от времени – начальные условия (фиксирующие изменение процесса теплообмена во времени). Для определения входящих в уравнение (3.1) составляющих скорости среды дополнительно привлекаются уравнения сохранения количества движения в проекции на различные оси координат. Кроме того, в случае неизотермической газообразной среды необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (теплопроводности, вязкости) и плотности вязкой газообразной среды от температуры.

Краевые условия, в свою очередь, состоят из геометрических условий, характеризующих форму и размеры системы, в которой протекает процесс; физических условий, характеризующих физические свойства среды и тела, и условий, характеризующих особенности протекания процесса на границе твердое тело — сплошная среда (газ, жидкость).

Отметим, что наиболее часто встречающимся краевым условиям для процесса теплообмена присвоены имена известных ученых. В задаче Дирихле требуется найти решение уравнения теплопереноса в замкнутой области, если на ее границе задано значение искомой функции. В задаче Неймана надо найти решение в замкнутой области, если на ее границе задана производная искомой функции по нормали к границе, а не сама искомая функция. Обобщением задач Дирихле и Неймана, когда на границе замкнутой области задана линейная комбинация искомой функции и ее производной по нормали к границе, является так называемая смешанная краевая задача.

В диссертационной работе рассматривается стационарный случай однородной среды без диффузии и химических реакций, протекающих с конечной скоростью. Если скорость движения сплошной среды мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. Общее уравнение закона сохранения энергии (представленное выше) упрощается и принимает вид

$$\rho_g c_{pg}\big(\mathbf{U}_g\nabla\big)T_g = \mathrm{div}\left(\lambda_g \nabla T_g\right). \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) описывает перенос тепла в газообразной среде за счет движения самой среды (левая часть уравнения (3.2)) и за счет теплопроводности (правая часть). В дальнейшем мы будем называть это уравнение *уравнением конвективной теплопроводности или уравнением теплопроводности с учетом движения среды.* Наличие левой части делает это уравнение существенно нелинейным, что приводит к большим математическим трудностям при нахождении его решений.

3.1 Метод сращиваемых асимптотических разложений

Как было отмечено выше, уравнение (3.2) является нелинейным, и для его решения (исходя из задачи диссертационного исследования) применим хорошо зарекомендовавший себя метод сращиваемых асимптотических разложений. В этой главе будем рассматривать задачи с возмущениями, действующими в очень узких областях, или зонах, в которых зависимые переменные испытывают достаточно резкие изменения. При кратком теоретическом изложении материала мы будем в основном ссылаться на результаты, которые более подробно изложены в [28, 96].

Ввиду наличия малого параметра при старшей производной эти узкие зоны часто оказываются лежащими вблизи границы области, в которой решается задача. Поэтому в задачах механики жидкостей и газов такие зоны называют пограничными слоями, в механике твердого тела – областями краевого эффекта, в электрических приложениях – поверхностными, или скин-слоями.

Следовательно, во многих физических задачах, где резкие изменения зависимых переменных часто происходят внутри интересующих нас областей, эти узкие зоны называются ударными слоями (скачками уплотнения), точками перехода, стоксовскими линиями или поверхностями. Указанные быстрые изменения мы не можем исследовать с помощью обычных медленных масштабов; это приводит к необходимости вводить новые – быстрые, увеличенные или растянутые – переменные. Таким образом, исследование обыкновенных дифференциальных уравнений показали, что получить равномерно пригодные разложения в случаях, когда в некоторых областях происходят изменения независимых переменных, где зависимые переменные испытывают резкие изменения, обычными методами невозможно.

Один из методов, связанных с этой проблемой, заключается в построении прямых разложений (называемых внешними разложениями) с использованием исходных переменных и в построении разложений (называемых внутренними разложениями), описывающих эти резкие изменения и использующих увеличенные масштабы. Внешние разложения становятся непригодными в областях резких изменений, в то время как пригодность внутренних разложений нарушается при выходе из этих областей. Чтобы связать эти разложения, используют так называемую процедуру сращивания [28, 96].

Остановимся кратко на этом методе. Решающим шагом в методе сращиваемых асимптотических разложений является выбор внутренних переменных. Здесь возникают следующие вопросы:

1. Какие независимые переменные должны быть растянуты?
2. Как они должны быть растянуты?

Ответ на первый вопрос зависит от выяснения особой природы задачи, включая сюда положение неоднородностей и их «форму», а именно появляются ли они в окрестности точки, линии или поверхности. Нужная степень растяжения обычно очевидна или находится путем проб. Руководящей идеей здесь является то, что внутренняя задача должна обладать наименьшей возможной вырожденностью, включать в первом приближении какие–либо существенные элементы, упущенные в первом внешнем решении, и что внутреннее и внешнее решения должны сращиваться.

Методу сращиваемых асимптотических разложений свойственна потеря краевых условий. Нельзя ожидать, что внешнее разложение будет удовлетворять условиям, которые наложены во внутренней области, и обратно, внутреннее разложение в общем случае не будет удовлетворять условиям в удаленной области. Таким образом, неудовлетворенные краевые условия вообще присущи как внутреннему, так и внешнему разложениям. Потеря условий восполняется сращиванием двух разложений.

Сращивание представляет собой основную черту метода. Возможность сращивания основана на существовании области перекрытия, в которой пригодны как внутреннее, так и внешнее разложения. Используя это перекрытие, можно получить точное соотношение между конечными частными суммами. Реализация этой замечательной возможности осуществима только для возмущения параметра, которое неоднородно в координатах, или для возмущения координаты, которое неоднородно по другим координатам. Нельзя срастить два различных параметрических разложения, таких как разложение для больших и малых значений числа Рейнольдса, числа Маха и т.д. Такие ряды могут перекрываться в том смысле, что они имеют общую область сходимости, но процесс аналитического продолжения дает только приближенное соотношение для некоторого конечного числа членов.

Теперь остановимся на самом принципе сращивания. Существование области перекрытия означает, что внутреннее разложение внешнего разложения должно с точностью до соответствующего порядка согласовываться с внешним разложением внутреннего разложения. Это общий принцип сращивания. Он может быть дан в различных специальных формулировках (в диссертации в качестве примера мы приводим два) [28, 96]:

– формулировка Прандтля (принцип предельного сращивания): **внутренний предел внешнего предела равен внешнему пределу внутреннего предела**;

– формулировка Ван-Дайка (принцип асимптотического сращивания): **m−членное внутреннее разложение n−членного внешнего разложения равно n−членному внешнему разложению m−членного внутреннего разложения**.

И последнее, это порядок сращивания. Все наши предшествующие рассуждения основывались на предположении о полной симметрии между внутренним и внешним пределами, так что эти два члена можно было бы поменять местами. Однако слова «внешнее разложение» или «внутреннее разложение» имеют конкретный смысл и в общем случае сращивание должно производиться шаг за шагом. Когда применяется стандартный порядок, сращивание будет само выявлять каждый новый член в асимптотической последовательности, и, следовательно, вид этого члена не должен предполагаться заранее известным.

Таким образом, главная идея, лежащая в основе этого метода, заключается в представлении решения несколькими асимптотическими разложениями, каждое из которых пригодно в некоторой части рассматриваемой области, причем области применимости соседних разложений перекрываются, что и позволяет провести их сращивание.

В нашем случае внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры ($t_g(x_k) = T_g(x_k)/T_\infty$, где x_k−декартовые координаты) ищутся следующим образом:

— внутреннее асимптотическое разложение обезразмеренной температуры по формуле

$$t_g(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon)\, t_{gn}(x_k), \quad f_0(\varepsilon) = 1, \tag{3.3}$$

— внешнее асимптотическое разложение обезразмеренной температуры по формуле

$$t_g^*(\varrho_k) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon)\, t_{gn}^*(\varrho_k), \tag{3.4}$$

где $\varrho_k = \varepsilon x_k$ – так называемая "сжатая" координата (ε – малый параметр задачи, который, как правило, всегда присутствует в физической задаче; в частности, когда мы рассматриваем фотофоретичесакое движение (см. главу 4), то в качестве малого параметра выступает число Рейнольдса: $\varepsilon = Re_\infty = \left(aU_\infty\rho_\infty\right)/\mu_\infty)$ [28, 96]; a, U_∞ – характерные размер и скорость).

При этом требуется, чтобы

$$\frac{f_{n+1}(\varepsilon)}{f_n(\varepsilon)} \to 0, \;\; \frac{f_{n+1}^*(\varepsilon)}{f_n^*(\varepsilon)} \to 0 \;\text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{3.5}$$

Относительно функций $f_n(\varepsilon)$ и $f_n^*(\varepsilon)$ предполагается лишь, что их порядок малости по ε увеличивается с ростом n. Недостающие краевые условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область:

$$t_g(x_k \to \infty) = t_g^*(\varrho_k \to 0). \tag{3.6}$$

Определяя последовательно $t_{gn}(x_k)$ и $t_{gn}^*(\varrho_k)$, используя процедуру сращивания, мы получаем выражения для распределения температуры в окрестности нагретой аэрозольной частицы сфероидальной формы в вязкой неизотермической газообразной среде до любого коэффициента $f_n(\varepsilon)$. Заметим, что сходимость полученного асимптотического разложения для случая частицы сферической формы доказывается в работе [154]. Учитывая, что в качестве приложений в главе 4 рассматриваются фото- и термофоретическое движения, в диссертации мы ограничиваемся нахождением распределения температуры в окрестности нагретой частицы сфероидальной формы до первого порядка малости по ε.

В заключение отметим, что выбор метода сращиваемых асимптотических разложений для решения уравнения теплопроводности с учетом движения среды, описывающего распределение температуры в окрестности нагретой крупной частицы, обусловлен применением разработанного в диссертации метода решения линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса к исследованию явления фотофореза (глава 4).

3.2 Применение метода сращиваемых асимптотических разложений для нахождения решения конвективного уравнения теплопроводности

В данной главе диссертации исследуется уравнение теплопроводности с учетом движения газообразной среды и степенного вида зависимости коэффициента теплопроводности и плотности среды от температуры в сфероидальной системе координат. Перейдем к формулировке задачи.

Задача 2. Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \backslash \Omega_p$ ($x \in \Omega_g$), где Ω_p – сфероидальная область с центром в нуле евклидова пространства R^3. Требуется найти распределение поля температуры $T_g(\tau, \eta)$, удовлетворяющее уравнению

$$\rho_g c_{pg} \left(U_\tau \frac{\partial T_g}{\partial \tau} + U_\eta \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \right) =$$

$$= \frac{1}{H_\tau H_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\lambda_g H_\phi \frac{\partial T_g}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda_g H_\phi \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \right) \right] \tag{3.7}$$

и краевому условию

$$\lim_{\tau \to \infty} T_g(\tau, \eta) = T_\infty. \tag{3.8}$$

Как отмечалось выше, это уравнение нелинейно, и для нахождения его решения применим метод сращиваемых асимптотических разложений.

Обезразмерим уравнение (3.7) и краевое условие (3.8), введя безразмерные координаты, температуру и скорость следующим образом: $y_k = x_k/a$, $t_g = T_g/T_\infty$, $\mathbf{V}_g = \mathbf{U_g}/U_\infty$, $\rho_g = \rho_\infty/t_g$, $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$, $\lambda_g = \lambda_\infty t_g^\alpha$, $\varepsilon = Re_\infty = \big(\rho_\infty a U_\infty\big)/\mu_\infty$, $Pr_\infty = c_{pg}\mu_\infty/\lambda_\infty$.

Обозначим через ε малый параметр задачи. Если в уравнении конвективной теплопроводности перейти к переменным $\lambda = \operatorname{sh}\tau$, $x = \cos\eta$, то получаем следующее уравнение:

$$\varepsilon \frac{æ_0}{t_g} \left[x G(\lambda) \frac{\partial t_g}{\partial \lambda} + (1 - x^2) g(\lambda) \frac{\partial t_g}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[t_g^\alpha (1 + \lambda^2) \frac{\partial t_g}{\partial \lambda} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[t_g^\alpha (1 - x^2) \frac{\partial t_g}{\partial x} \right], \tag{3.9}$$

где $æ_0 = \dfrac{a}{c} \dfrac{c_{pg}\mu_\infty}{\lambda_\infty}$, функции $G(\lambda)$, $g(\lambda)$ входят в выражения для компонент массовой скорости U_τ и U_η, соответственно. Эти функции берутся из решения линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса (глава 2).

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры $t_g^\star$, которое получается из уравнения конвективной теплопроводности заменой y_k на ϱ_k ($\varrho_k = \varepsilon y_k$):

$$\frac{Pr_\infty}{t_g^*} \left(\mathbf{V_g^*} \cdot \nabla^* \right) t_g^* = \operatorname{div}^* \left(\mathrm{t_g^{*\alpha}} \nabla^* \ \mathrm{t_g^*} \right) \tag{3.10}$$

и

$$\mathbf{V}_g^* = \mathbf{n}_z + \varepsilon \mathbf{V}_g^* + ..., \;\; t_g^* \to 1, \tag{3.11}$$

где ∇^* – оператор набла, полученный из оператора ∇ заменой y_k на ϱ_k и т.д., $\mathbf{n}_z$ – единичный вектор в направлении оси Oz.

Как мы отмечали выше, данный метод позволяет получить решения конвективного уравнения теплопроводности до n-го порядка малости по ε включительно. При нахождении температуры мы ограничимся поправками первого порядка малости, т.к. этого достаточно для решения физических задач, рассмотренных в 4 главе.

Построение решения начинается с определения нулевого члена внешнего разложения (3.4). Исходя из краевого условия (3.11) в данном случае, очевидно, задаче удовлетворяет решение

$$t_{g0}^* = 1. \tag{3.12}$$

Найдем нулевой член внутреннего разложения (3.3). Учитывая, что $t_{g0} = t_{g0}(\lambda)$, из уравнения (3.9) при $\varepsilon = 0$, получаем:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[t_{g0}^{\alpha}(\lambda)\left(1+\lambda^2\right)\frac{dt_{g0}}{d\lambda}\right] = 0,$$

и если ввести обозначение $\Phi_0(\lambda) = t_{g0}^{\alpha+1}(\lambda)$, то наше уравнение принимает вид:

$$\Delta\Phi_0(\lambda) = 0. \tag{3.13}$$

Таким образом, имеем следующее уравнение, описывающее распределение температуры вне частицы в нулевом приближении:

$$\frac{d}{d\lambda}\left((1+\lambda^2)\frac{d\Phi_0(\lambda)}{d\lambda}\right) = 0. \tag{3.14}$$

Интегрируя два раза уравнение (3.14), имеем:

$$\Phi_0(\lambda) = N_0 + \frac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\lambda,$$

и, соответственно,

$$t_{g0}(\lambda) = \left(N_0 + \frac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\lambda\right)^{1/(1+\alpha)}. \tag{3.15}$$

Постоянная интегрирования N_0 определяется из условия сращивания, для которого внешнее решение должно быть разложено в ряд по ϱ. Затем значения констант устанавливаются из требования соответствия поведения членов полученного ряда при $\varrho \to 0$ и членов разложения (3.15) при $\lambda \to \infty$. С учетом выражения (3.12) для нулевых приближений сращивание тривиально, получаем $N_0 = 1$. Следовательно, мы получили выражение для нулевого приближения внутреннего разложения, которое имеет следующий вид:

$$t_{g0}(\lambda) = \left(1 + \frac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\lambda\right)^{1/(1+\alpha)}, \tag{3.16}$$

где M_0 – постоянная интегрирования, которая должна определяться из краевых условий на поверхности частицы. Как будет показано в 4 главе, для M_0/c имеем следующее выражение:

$$\frac{M_0}{c} = \frac{t_{pS}^{1+\alpha} - 1}{\operatorname{arcctg}\,\lambda_0}, \tag{3.17}$$

здесь $t_{pS} = t_{p0}(\lambda = \lambda_0)$, $t_{gS} = t_{g0}(\lambda = \lambda_0)$, $T_{pS} = t_{pS}T_\infty$– средняя температура поверхности нагретого сфероида, которая связана с распределением плотности тепловых источников q_p в его объеме.

Перейдем теперь к нахождению первого приближения для внешнего разложения. В нашем случае для членов первого приближения внешнего разложения из выражений (3.4) и (3.12) имеем:

$$t_g^*(\varrho, x) = 1 + f_1^*(\varepsilon)\; t_{g1}^*(\varrho, x), \tag{3.18}$$

где $\varrho = \varepsilon\lambda$ – "сжатая" радиальная координата.

Видно, что для нахождения первого приближения для внешнего разложения необходимо сначала определить явный вид коэффициента $f_1^*(\varepsilon)$. Для этого в решении для нулевого приближения внутреннего разложения перейдем к внешней переменной ϱ, полученный результат сравним с выражением (3.18) и получаем, что $f_1^*(\varepsilon) = \varepsilon$.

Таким образом, имеем

$$t_g^*(\varrho, x) = 1 + \varepsilon\; t_{g1}^*(\varrho, x). \tag{3.19}$$

Подставляя выражение (3.19) в уравнение (3.10) и удерживая члены порядка ε, получаем следующее уравнение для нахождения функции $t^*_{g1}(\varrho, x)$:

$$\frac{c}{a}\,Pr_\infty\left[\varrho^2 x\frac{\partial t^*_{g1}(\varrho,x)}{\partial\varrho}+\varrho\left(1-x^2\right)\frac{\partial t^*_{g1}(\varrho,x)}{\partial x}\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\varrho^2\frac{\partial t^*_{g1}(\varrho,x)}{\partial\varrho}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial t^*_{g1}(\varrho,x)}{\partial x}\right], \qquad (3.20)$$

$$\lim_{\varrho\to\infty} t^*_{g1}(\varrho,x)=0. \qquad (3.21)$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{n}_z = c\dfrac{\operatorname{ch}\tau}{H_\tau}\cos\eta\,\mathbf{e}_\tau - c\dfrac{\operatorname{sh}\tau}{H_\tau}\sin\eta\,\mathbf{e}_\eta$.

В уравнении (3.20) перейдем к новой переменной $\xi = cPr_\infty\varrho/a$, в результате чего получим уравнение

$$\xi^2 x\frac{\partial t^*_{g1}}{\partial\xi}+\xi\left(1-x^2\right)\frac{\partial t^*_{g1}}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^2\frac{\partial t^*_{g1}}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial t^*_{g1}(\varrho,x)}{\partial x}\right]. \qquad (3.22)$$

Будем искать решение уравнения (3.22) в виде:

$$t^*_{g1}(\xi,x)=\Phi^*_1(\xi,x)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\xi x\right\}. \qquad (3.23)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial t^*_{g1}(\xi,x)}{\partial\xi}=\exp\left\{\frac{1}{2}\xi x\right\}\left(\frac{\partial\Phi^*_1}{\partial\xi}+\frac{x}{2}\Phi^*_1\right),$$

$$\frac{\partial^2 t^*_{g1}(\xi,x)}{\partial\xi^2}=\exp\left\{\frac{1}{2}\xi x\right\}\left(\frac{\partial^2\Phi^*_1}{\partial\xi^2}+x\frac{\partial\Phi^*_1}{\partial\varrho}+\frac{x^2}{4}\Phi^*_1\right),$$

$$\frac{\partial t^*_{g1}(\xi,x)}{\partial x}=\exp\left\{\frac{1}{2}\xi x\right\}\left(\frac{\partial\Phi^*_1}{\partial x}+\frac{\xi}{2}\Phi^*_1\right),$$

$$\frac{\partial^2 t^*_{g1}(\xi,x)}{\partial x^2}=\exp\left\{\frac{1}{2}\xi x\right\}\left(\frac{\partial^2\Phi^*_1}{\partial x^2}+\xi\frac{\partial\Phi^*_1}{\partial\xi}+\frac{\xi^2}{4}\Phi^*_1\right),$$

и делая подстановку выражения (3.23) в уравнение (3.22), получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial\Phi^*_1}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial\Phi^*_1}{\partial x}\right]-\frac{1}{4}\Phi^*_1=0. \qquad (3.24)$$

Решение уравнения (3.24) ищем в виде

$$\Phi_1^*(\xi,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\ f_n(\xi)\ P_n(x). \tag{3.25}$$

Подставляя (3.25) в уравнение (3.24), имеем

$$\xi^2\frac{d^2 f_n}{d\xi^2}+2\xi\frac{df_n}{d\varrho}-\left[\frac{1}{4}\xi^2+n(n+1)\right]f_n=0. \tag{3.26}$$

Здесь мы учли свойство полиномов Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP_n(x)}{dx}\right]+n(n+1)P_n(x)=0.$$

Если в уравнении (3.26) ввести новую переменную $\nu=\dfrac{1}{2}\xi$, то мы получаем дифференциальное уравнение для модифицированных сферических функций Бесселя [1]:

$$\nu^2\frac{d^2 f_n}{d\nu^2}+2\nu\frac{df_n}{d\nu}-\left[n(n+1)+\nu^2\right]f_n=0, \tag{3.27}$$

решениями которого являются функции $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\nu}}I_{n+1/2}(\nu)$ и $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\nu}}K_{n+1/2}(\nu)$.

Модифицированные сферические функции Бесселя $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\nu}}I_{n+1/2}(\nu)$ и $\sqrt{\dfrac{\pi}{2\nu}}K_{n+1/2}(\nu)$ разлагаются в степенные ряды [1]:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}I_{n+\frac{1}{2}}(\nu)=\frac{\nu^n}{1\cdot 3\cdot 5...(2n+1)}\left\{1+\frac{\nu^2/2}{1!(2n+3)}+\frac{(\nu^2/2)^2}{2!(2n+3)(2n+5)}+...\right\},$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}K_{n+\frac{1}{2}}(\nu)=\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)\exp\{-\nu\}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2\nu)^k}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.20), удовлетворяющее условию (3.21), имеет вид:

$$t_{g1}^*(\varrho,x)=\exp\left\{\frac{cPr_\infty}{2a}\varrho x\right\}\sum_{n=0}^{\infty}L_n\sqrt{\frac{a\pi}{cPr_\infty\varrho}}K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{cPr_\infty}{2a}\varrho\right)P_n(x). \tag{3.28}$$

Здесь произвольные постоянные интегрирования L_n должны быть определены в результате сращивания, которое в данном случае заключается в сравнении поведения функции t_{g1}^* при $\varrho\to 0$ и функции t_{g0} при $\lambda\to\infty$, т.е.

$$t_{g0}(\lambda\to\infty)=1+\varepsilon t_{g1}^*(\varrho\to 0,x),$$

и нетрудно установить, что $L_0 = \dfrac{aPr_\infty M_0}{\pi(1+\alpha)}$, $L_n = 0 \ \ (n \geq 1)$. Таким образом, окончательно получаем следующее выражение для первого внешнего приближения:

$$t^*_{g1}(\varrho, x) = \frac{M_0}{c(1+\alpha)\varrho} \exp\left\{ \frac{cPr_\infty}{2a} \, \varrho \, (x-1) \right\}. \tag{3.29}$$

Заметим, что в случае движения нагретой сферы в вязкой неизотермической газообразной среде в работе [121][(3.3.19),с.99] методом сращиваемых асимптотических выражений получена следующая формула для первого приближения внешнего разложения:

$$t^*_{e1}(\xi, x) = \frac{\Gamma_0}{(1+\alpha)\xi} \exp\left\{ \frac{Pr_\infty}{2} \, \xi \, (x-1) \right\}. \tag{3.30}$$

Если в пределе при $c \to 0$, $\lambda \to \infty$ так, что $r = c\lambda$ остается конечным, то получаем сферические координаты r, θ, φ. В этом случае формула (3.29) в пределе переходит в формулу (3.30) ($\xi = \varepsilon y$, $y = r/R-$ обезразмеренная радиальная координата, $R-$ радиус сферы).

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Из (3.3) имеем:

$$t_g(\lambda, x) = t_{g0}(\lambda) + f_1(\varepsilon) t_{g1}(\lambda, x).$$

Для определения явного вида коэффициента $f_1(\varepsilon)$ поступим аналогичным образом, что и для $f^*_1(\varepsilon)$. Видим, что $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$. Таким образом, первое приближение для внутреннего разложения,

$$t_g(\lambda, x) = t_{g0}(\lambda) + \varepsilon \, t_{g1}(\lambda, x). \tag{3.31}$$

Для $t_{g1}(\lambda, x)$ в двучленном внутреннем разложении получаем из уравнения (3.9) (оставляя члены $\sim \varepsilon$) в системе координат сплюснутого сфероида следующее уравнение:

$$\begin{gathered} \frac{æ_0}{t_{g0}(\lambda)} x \, G(\lambda) \frac{d\, t_{g0}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\Bigg[(1+\lambda^2) t^\alpha_{g0}(\lambda) \times \\ \times \left(\frac{\partial\, t_{g1}(\lambda, x)}{\partial \lambda} + \alpha \frac{t_{g1}(\lambda, x)}{t_{g0}(\lambda)} \frac{d\, t_{g0}(\lambda)}{d\lambda} \right) \Bigg] + \frac{\partial}{\partial x}\Bigg[(1-x^2) t^\alpha_{g0}(\lambda) \times \\ \times \left(\frac{\partial\, t_{g1}(\lambda, x)}{\partial x} + \alpha \frac{t_{g1}(\lambda, x)}{t_{g0}(\lambda)} \frac{d\, t_{g0}(\lambda)}{dx} \right) \Bigg]. \end{gathered} \tag{3.32}$$

Здесь функция $G(\lambda) = A_1 G_1(\lambda) + A_2 G_2(\lambda) + A_3 G_3(\lambda)$, $æ_0 = aPr_\infty / c$.

Как мы отмечали выше, методу сращиваемых асимптотических разложений свойственна потеря краевых условий. Чтобы определить поведение функции $t_{g1}(\lambda \to \infty, x)$, срастим двучленные внутренние и внешние разложения. Для этого сравним поведение внутреннего разложения $t_g(\lambda, x)$ при $\lambda \to \infty$ и поведение внешнего разложения $t_g^*(\varrho, x)$ при $\varrho \to 0$. В результате получаем

$$t_{g1}(\infty, x) = \frac{c}{2a} æ(x-1), \;\; æ = \frac{Pr_\infty M_0}{c(1+\alpha)}. \tag{3.33}$$

Таким образом, недостающее краевое условие для первого приближения поля температуры вдали от частицы имеет вид (3.33).

Найдем решение уравнения (3.32):

$$t_{g1}(\tau, \eta) = \frac{1}{t_{g0}^{\alpha}(\lambda)} \Phi_{g1}(\lambda, x), \quad x = \cos\eta, \;\; \lambda = \operatorname{sh}\tau. \tag{3.34}$$

Подставляя выражение (3.34) в уравнение (3.32) и, учитывая, что

$$\frac{dt_{g0}}{d\lambda} = -\frac{M_0}{c} \frac{1}{(1+\alpha)\left(1+\lambda^2\right)} \frac{t_{g0}}{1 + \dfrac{M_0}{c} \operatorname{arcctg} \lambda},$$

$$V_\tau(\tau, \eta) = \frac{a^2 \cos\eta}{c \operatorname{ch}\tau H_\tau} G(\tau, \eta), \;\; G(\tau, \eta) = A_1 G_1(\lambda) + A_2 G_2(\lambda) + A_3 G_3(\lambda),$$

имеем следующее уравнение для функции Φ_{g1}:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(1+\lambda^2\right)\frac{\partial\Phi_{g1}}{\partial\lambda}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial\Phi_{g1}}{\partial x}\right] =$$

$$= -æ\frac{a}{c}\frac{G}{1+\lambda^2}\frac{x}{1+\dfrac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\lambda}. \tag{3.35}$$

Пусть

$$\Phi_{g1}(\lambda, x) = -\frac{c}{2a} æ\left(1 - d_1 \frac{\operatorname{arcctg}\lambda}{\operatorname{arcctg}\lambda_0}\right) + \chi(\lambda)\, x. \tag{3.36}$$

Подставляя выражение (3.36) в уравнение (3.35), имеем

$$\left(1+\lambda^2\right)\frac{d^2\chi}{d\lambda^2} + 2\lambda\frac{d\chi}{d\lambda} - 2\chi = -æ\frac{a}{c}\frac{G}{1+\lambda^2}\frac{1}{1+\dfrac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\lambda}. \tag{3.37}$$

Найдем решение однородного уравнения (3.38) соответствующего неоднородному уравнению (3.37):

$$\left(1+\lambda^2\right)\frac{d^2\chi}{d\lambda^2}+2\lambda\frac{d\chi}{d\lambda}-2\chi=0. \tag{3.38}$$

Легко проверить, что решениями уравнения (3.38) являются функции

$$\chi_1(\lambda)=\lambda, \quad \chi_2(\lambda)=\lambda\text{arcctg}\,\lambda-1. \tag{3.39}$$

Учитывая, что $\chi_1(\lambda)$, $\chi_2(\lambda)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения (3.38), а определитель Вронского этих функций – $W(\lambda)=\dfrac{1}{1+\lambda^2}$, мы можем найти общее решение неоднородного уравнения (3.37), которое имеет вид

$$\chi(\lambda)=N_1\lambda+M_1\left(\lambda\,\text{arcctg}\,\lambda-1\right)+æ\frac{a}{c}\lambda\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\lambda\,\text{arcctg}\,\lambda-1}{(1+\lambda^2)t_{g0}^{1+\alpha}}\;G(\lambda)\;d\lambda-$$

$$-æ\frac{a}{c}\left(\lambda\,\text{arcctg}\,\lambda-1\right)\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\lambda G(\lambda)}{(1+\lambda^2)t_{g0}^{1+\alpha}}\;d\lambda. \tag{3.40}$$

Произвольные постоянные N_1 и M_1 определяются из краевого условия (3.33) и краевого условия на поверхности частицы, сформулированного в задаче 5 для описания такого физического процесса как фотофорез, рассмотренного в 4 главе диссертации.

Таким образом, решение для функции $\chi(\lambda)$, удовлетворяющее краевым условиям (3.33), имеет вид

$$\chi(\lambda)=M_1(\lambda\,\text{arcctg}\,\lambda-1)+æ\frac{a}{c}(A_1\chi_3(\lambda)+A_2\chi_4(\lambda)+A_3\chi_5(\lambda)), \tag{3.41}$$

Выражения для функций $\chi_i(\lambda)$, $i=3,4,5$ приведены в приложении.

В результате мы получили общее решение конвективного уравнения теплопроводности, т.е. поле температуры в окрестности частицы

$$t_g(\lambda,x)=t_{g0}(\lambda)+\varepsilon\,t_{g1}(\lambda,x), \tag{3.42}$$

где

$$t_{g0}(\lambda)=\left(1+\frac{M_0}{c}\text{arcctg}\,\lambda\right)^{1/(1+\alpha)}, \tag{3.43}$$

$$t_{g1}(\lambda, x) = -\frac{æ\, c}{2at_{g0}^{\alpha}}\left(1 - d_1\frac{\text{arcctg}\lambda}{\text{arcctg}\lambda_0}\right) + \frac{\cos\eta}{t_{g0}^{\alpha}}\Big[M_1(\lambda\,\text{arcctg}\,\lambda - 1) +$$

$$+\frac{æ\, c}{2a}\Big(A_1\chi_3(\lambda) + A_2\chi_4(\lambda) + A_3\chi_5(\lambda)\Big)\Big]. \qquad (3.44)$$

Таким образом, в результате проведенного исследования нами решена **Задача 2**, получены выражения для распределения температуры в неизотермической газообразной среде (нулевые и первые приближения) в окрестности крупной твердой нагретой частицы сфероидальной формы.

3.3 Решение конвективного уравнения теплопроводности методом теории возмущений

В этом параграфе мы рассмотрим другой математический метод решения нелинейного уравнения конвективной теплопроводности — метод теории возмущения. При кратком теоретическом изложении материала мы будем в основном опираться на результаты, которые более подробно изложены в [4, 5, 23, 26, 31, 44, 93, 94].

Теория возмущения – метод решения задач, основанный на разложении по малому параметру (ε), позволяющий вслед за решением "невозмущенной" задачи, соответствующей нулевому значению малого параметра, находить путем последовательных итераций решение "возмущенной" задачи, отвечающей $\varepsilon \neq 0$. При этом возмущением является любое малое отклонение от упрощенной задачи, допускающей точное решение. Таким образом, метод теории возмущений — это метод решения математических задач при помощи такой последовательности приближений, которая сходится к решению и строится рекуррентно и, таким образом, проблема сводится к нахождению асимптотики наилучшего приближения к истинному решению с точностью до ε, ε^2, ... Теория возмущения впервые была предложена для решения проблем небесной механики, связанных с изучением движения планет в солнечной системе.

Заметим, что лишь ограниченный класс задач может быть решен точно, поэтому практически в каждой проблеме приходится использовать упрощенное описание, которое сводится к нахождению одного или нескольких членов разложения искомого решения по малому параметру, который может явно содержаться в исходных уравнениях, но в ряде случаев его приходится вводить искусственно, для удобства. В сложных задачах требуется преобразовывать исходные уравнения и только после нетривиальных упрощений удается выделить малый параметр и использовать теорию возмущения. Если старшей из степеней малого параметра ε, которая учитывается в решении, является ε^n, то говорят об n-м приближении теории возмущения. Решение исходной невозмущенной задачи соответствует, таким образом, нулевому приближению. Как отмечалось выше, выбор нулевого приближения определяется критериями удобства и простоты, а также условием быстрой сходимости ряда по степеням ε, который описывает вклад последовательных итераций по возмущению. Теория возмущения широко используется для решения задач в математике, физике, механике, химии, технике и т.д. Перейдем к математической формулировке задачи.

Задача 3. Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \backslash \Omega_p$ $(x \in \Omega_g)$, где Ω_p – сфероидальная область с центром в нуле евклидова пространства R^3. Требуется найти распределение поля температуры $T_g(\tau, \eta)$, удовлетворяющее уравнению

$$\rho_g c_{pg} \left(U_\tau \frac{\partial T_g}{\partial \tau} + U_\eta \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \right) =$$
$$= \frac{1}{H_\tau H_\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\lambda_g H_\phi \frac{\partial T_g}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda_g H_\phi \frac{\partial T_g}{\partial \eta} \right) \right] \qquad (3.45)$$

и краевому условию

$$\lim_{\tau \to \infty} \left(T_g(\tau, \eta) - |\nabla \ T_g| c \operatorname{sh} \tau \cos \eta \right) = T_\infty. \qquad (3.46)$$

Решать задачу 3 будем **методом теории возмущений**. Использование этого метода связано с особенностью постановки некоторых краевых условий вдали от частицы (на бесконечности) при математическом описании, например, явления термофореза (глава 4) в системе координат сплюснутого сфероида, а также с наличием малого параметра и в самом уравнении конвективной теплопроводности (3.45).

В методе теории возмущения важное место отводится малому параметру ζ, который в нашем случае равен $a|\nabla T_g|/T_\infty$ и характеризует перепад температуры на размере частицы (см. главу 4).

При $\zeta \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому будем искать решение уравнений теплопереноса в виде:

$$t_g(\lambda, \eta) = t_{g0}(\lambda) + \zeta\ t_{g1}(\lambda, \eta) + ... \tag{3.47}$$

Обезразмерим уравнение (3.45), введя безразмерные координаты, температуру и скорость следующим образом: $t_g = T_g/T_\infty$, $\mathbf{V_g} = \mathbf{U_g}/U_\infty$. В этом случае конвективное уравнение теплопереноса в системе координат сплюснутого сфероида (τ, η, ϕ) принимает вид

$$\zeta \frac{æ_0}{t_g}\left[xG(\lambda)\frac{\partial t_g}{\partial \lambda} + (1-x^2)g(\lambda)\frac{\partial t_g}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[t_g^\alpha(1+\lambda^2)\frac{\partial t_g}{\partial \lambda}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left[t_g^\alpha(1-x^2)\frac{\partial t_g}{\partial x}\right], \tag{3.48}$$

где $æ_0 = \dfrac{a}{c}\dfrac{c_{pg}\mu_\infty}{\lambda_\infty}$, $\lambda = \operatorname{sh}\tau, x = \cos\eta$, функции $G(\lambda)$, $g(\lambda)$ входят в выражения для компонент массовой скорости U_τ и U_η соответственно.

Уравнение (3.48) будем решать с краевым условием

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(t_g(\tau, \eta) - \zeta\frac{c}{a}\operatorname{sh}\tau\cos\eta\right) = 1. \tag{3.49}$$

Применим теорию возмущения к уравнению (3.48) и при этом ограничимся поправками первого порядка малости. Построение решения начинается с определения нулевого члена, который удовлетворяет уравнению (3.48). При $\zeta = 0$ из уравнения (3.48) имеем:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[t_{g0}^\alpha(\lambda)\left(1+\lambda^2\right)\frac{d\,t_{g0}(\lambda)}{d\lambda}\right] = 0. \tag{3.50}$$

Интегрируя уравнения (3.50), получаем следующее выражение для t_{g0}, которое удовлетворяет краевому условию (3.49):

$$t_{g0}(\lambda) = \left(1 + \frac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\lambda\right)^{\dfrac{1}{1+\alpha}}. \tag{3.51}$$

Постоянная интегрирования M_0/c определяется из краевых условий на поверхности частицы (см. главу 4).

Поскольку нулевое приближение нами найдено, мы можем приступить к нахождению первого приближения. Найдем первое приближение для температуры t_{g1}. Подставляя в уравнение (3.48) нулевое приближение (3.51), и оставляя члены пропорциональные ζ, имеем:

$$\frac{æ_0}{t_{g0}(\lambda)} x\, G(\lambda) \frac{d\, t_{g0}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Bigg[(1+\lambda^2) t_{g0}^{\alpha}(\lambda) \times \\ \times \left(\frac{\partial\, t_{g1}(\lambda,x)}{\partial\lambda} + \alpha \frac{t_{g1}(\lambda,x)}{t_{g0}(\lambda)} \frac{d\, t_{g0}(\lambda)}{d\lambda}\right)\Bigg] + \frac{\partial}{\partial x}\Bigg[(1-x^2) t_{g0}^{\alpha}(\lambda) \times \\ \times \left(\frac{\partial\, t_{g1}(\lambda,x)}{\partial x} + \alpha \frac{t_{g1}(\lambda,x)}{t_{g0}(\lambda)} \frac{d\, t_{g0}(\lambda)}{dx}\right)\Bigg]. \tag{3.52}$$

Решение уравнения (3.52) будем искать в виде

$$t_{g1}(\tau,\eta) = \frac{1}{t_{g0}^{\alpha}(\lambda)} \Phi_{g1}(\lambda,x), \quad x = \cos\eta,\ \lambda = \operatorname{sh}\tau. \tag{3.53}$$

Подставляя выражение (3.53) в уравнение (3.52) и, учитывая, что

$$\frac{dt_{g0}}{d\lambda} = -\frac{M_0}{c} \frac{1}{(1+\alpha)\left(1+\lambda^2\right)} \frac{t_{g0}}{1+\dfrac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\,\lambda},$$

$$V_{\tau}(\tau,\eta) = \frac{a^2\,\cos\eta}{c\,\operatorname{ch}\tau H_{\tau}}\, G(\tau,\eta),\ G(\tau,\eta) = A_1\, G_1(\lambda) + A_2\, G_2(\lambda),$$

имеем следующее уравнение для функции Φ_{g1}:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(1+\lambda^2\right)\frac{\partial\Phi_{g1}}{\partial\lambda}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial\Phi_{g1}}{\partial x}\right] = -\Omega\frac{G}{1+\lambda^2} \times \\ \times \frac{x}{1+\dfrac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\,\lambda}, \tag{3.54}$$

где $\Omega = \dfrac{M_0 æ_0}{c\,(1+\alpha)}$.

Пусть

$$\Phi_{g1}(\lambda,x) = \chi(\lambda)\, x. \tag{3.55}$$

Подставляя (3.55) в уравнение (3.54), имеем:

$$\left(1+\lambda^2\right)\frac{d^2\chi}{d\lambda^2} + 2\lambda\frac{d\chi}{d\lambda} - 2\chi = -\Omega\frac{G}{1+\lambda^2}\frac{1}{1+\dfrac{M_0}{c}\operatorname{arcctg}\,\lambda}. \tag{3.56}$$

Решая данное уравнение аналогичным способом как и в пункте 3.2, мы получим общее решение неоднородного дифференциального уравнения (3.56), которое имеет вид

$$\chi(\lambda) = N_1\lambda + M_1\,(\lambda\operatorname{arcctg}\lambda - 1) + \Omega\lambda\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\lambda\operatorname{arcctg}\lambda - 1}{(1+\lambda^2) t_{g0}^{1+\alpha}}\, G(\lambda)\, d\lambda -$$

$$-\Omega\left(\lambda\operatorname{arcctg}\lambda-1\right)\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\lambda G(\lambda)}{(1+\lambda^2)t_{g0}^{1+\alpha}}\,d\lambda. \tag{3.57}$$

Произвольные постоянные N_1 и M_1 определяются из краевого условия (3.49) и краевого условия на поверхности частицы, сформулированного в задаче 4 для описания такого физического процесса как термофорез, рассмотренного в 4 главе диссертации.

Таким образом, решение для функции $\chi(\lambda)$, удовлетворяющее краевым условиям (3.49), имеет вид

$$\chi(\lambda)=\frac{c}{a}\lambda+M_1(\lambda\operatorname{arcctg}\lambda-1)+\Omega(A_1\chi_3(\lambda)+A_2\chi_4(\lambda)), \tag{3.58}$$

Следовательно, первое приближение для поля температуры, удовлетворяющее краевому условию (3.49), имеет следующий вид:

$$t_{g1}(\lambda,\eta)=\frac{\cos\eta}{t_{g0}^{\alpha}(\lambda)}\left[\frac{c}{a}\lambda+M_1\big(\lambda\mathrm{arcctg}\lambda-1\big)+\Omega\big(A_1\chi_3(\lambda)+A_2\chi_4(\lambda)\big)\right]. \tag{3.59}$$

Таким образом, в результате проведенного исследования нами решена **Задача 3**, получены выражения для распределения температуры в неизотермической газообразной среде (нулевое и первое приближения) в окрестности твердой крупной нагретой частицы сфероидальной формы.

4 Глава 4. Особенности термо- и фотофоретического движения неравномерно нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы

В этой главе в качестве приложения разработанной выше теории, рассмотрим влияния движения среды (учет конвективного члена в уравнении теплопроводности) на термо- и фотофорез, получим выражения для силы и скорости термо- и фотофореза, а также проведем качественный анализ влияния движения среды на обычный термо- и фотофорез.

В газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникнуть упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей нескомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. При этом движение частиц, обусловленное внешним заданным градиентом температуры, называют термофорезом. Термофоретическая сила перемещает частицы в области с более низкой температурой. Когда термофоретическая сила становится равной по величине силе сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно со скоростью, называемой термофоретической. Явление фотофореза в газе заключается в движении частиц в поле электромагнитного излучения под действием радиометрической силы. Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей, внутри нее происходит выделение тепловой энергии с некоторой объемной плотностью q_p, которая неоднородно нагревает частицу. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны частицы с большей скоростью, чем от холодной. В результате частица приобретает нескомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны частицы к холодной. В зависимости от размеров и оптических свойств материала частицы более горячей сможет оказаться как освещенная, так и теневая сторона частицы. Поэтому имеет место как положительный (движение частицы в направлении излучения), так и отрицательный фотофорез. Кроме того, если поток излучения неоднороден по сечению, то может возникнуть поперечное относительно направления распространения электромагнитного излучения движение частицы в газе.

Явления термо- и фотофореза практически всегда сопутствуют термодинамически неравновесным аэродисперсным системам. Фото- и термофоретическая сила может оказывать значительное влияние на процесс осаждения частиц в каналах тепло- и массообменников, на движение частиц в зонах просветления дисперсных систем и в окрестностях, вымывающих частицы, капель, ее можно использовать при проведении тонкой очистки небольших объемов газов, отборе аэрозольных проб, нанесения, заданной толщины, специальных покрытий из частиц, получении высококачественных оптических волокон и.д.

При описании термо- и фотофореза свободной конвекцией можно пренебречь. Это связано с тем, что число Грасгофа, описывающее свободную конвекцию, много меньше единицы. Обозначим через g – ускорение свободного падения, L – характерный линейный размер, $\beta = (273 + t_0)^{-1}\ {}^oK$, t_c, t_0 – температура поверхности теплообмена и теплоносителя (${}^oC$), ν – коэффициент кинематической вязкости, и определим число Грасгофа:

$$Gr = \frac{gL^3\beta\left(t_c - t_o\right)}{\nu^2}.$$

Если примем температуру газа вдали от частицы $T_\infty = 273\,K$ и максимально можем нагреть твердую частицу (чтобы была справедлива наша теория) до температуры ее плавления, т.е. $\sim T_c = 900\,K$, $L \approx 25 \cdot 10^{-6}$ м (частица крупная) и $\nu = 13.28 \cdot 10^{-6}$, то $Gr \ll 1$.

Впервые задача об особенности движения крупной нагретой твердой гидрозольной частицы сфероидальной формы (сплюснутый сфероид) рассмотрена в работах [79, 80]. В работе [104] впервые рассмотрен термо- и фотофорез неравномерно нагретой крупной твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы в вязкой газообразной среде. В этих работах учитывался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярно переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры и показан нелинейный характер зависимости силы и скорости термо- и фотофореза от средней температуры поверхности частицы. Однако, в этих работах не учитывалось влияние движения среды (конвективный члена в уравнении теплопроводности). Проведенный в диссертационном исследовании качественный анализ по полученным формулам показал, что этот вклад может составлять от 20% до 40% к обычному термо- и фотофорезу.

4.1 Решение уравнения теплопроводности, описывающего распределение температуры внутри частицы

Поскольку в этой главе при описании фотофореза и термофореза нам потребуется распределение температуры внутри нагретой частицы сфероидальной формы, то приведем решение уравнения теплопроводности, описывающее поле температуры внутри частицы, с учетом степенного вида зависимости коэффициента теплопроводности частицы от температуры (см. допущение 3). Таким образом, нам необходимо решить уравнение

$$\frac{1}{H_\tau^2(\tau,\eta)H_\phi(\tau,\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\lambda_p(\tau,\eta)H_\phi(\tau,\eta)\frac{\partial T_p(\tau,\eta)}{\partial\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda_p(\tau,\eta)H_\phi(\tau,\eta)\frac{\partial T_p(\tau,\eta)}{\partial\eta}\right)\right]=-q_p(\tau,\eta) \qquad (4.1)$$

с краевым условием

$$\lim_{\tau\to 0} T_p\left(\tau,\eta\right)<\infty, \qquad (4.2)$$

где $H_\tau = c\sqrt{\operatorname{ch}^2\tau-\sin^2\eta}$, $H_\phi = c\operatorname{ch}\tau\sin\eta$, $\lambda_p = \lambda_*\left(\dfrac{T_p}{T_\infty}\right)^\omega$, $\lambda_* = \lambda_p(T_\infty)$, q_p – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых и происходит ее нагрев; в краевом условии (4.2) отражена конечность физических величин, характеризующих частицу при $\tau\to 0$.

В уравнении (4.1) перейдем к новым переменным $\lambda = \operatorname{sh}\lambda$, $x=\cos\eta$, вследствие чего имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[t_p^\omega(\lambda,x)\left(1+\lambda^2\right)\frac{\partial t_p(\lambda,x)}{\partial\lambda}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[t_p^\omega(\lambda,x)\left(1-x^2\right)\frac{\partial t_p(\lambda,x)}{\partial x}\right]=-\frac{c^2\left(\lambda^2+x^2\right)}{\lambda_* T_\infty}q_p(\lambda,x), \qquad (4.3)$$

где $t_p = T_p/T_\infty$, с краевым условием

$$\lim_{\lambda \to 0} t_p\left(\lambda, x\right) < \infty. \tag{4.4}$$

Как будет показано ниже, до первого порядка малости по ε мы можем записать:

$$t_p(\lambda, x) = t_{p0}(\lambda) + \varepsilon t_{p1}(\lambda, x), \tag{4.5}$$

где $t_{p1}(\lambda, x) \ll t_{p0}(\lambda)$.

Будем искать решение уравнения (4.5) методом разделения переменных. Пусть

$$-\frac{c^2\left(\lambda^2 + x^2\right)}{\lambda_* T_\infty} q_p(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\lambda) P_n(x), \tag{4.6}$$

где

$$q_n(\lambda) = -\frac{c^2}{\lambda_* T_\infty}\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\lambda^2 + x^2\right) q_p(\lambda, x)\ P_n(x)\ dx \quad (n \geq 0),$$

здесь $P_n(x)$ - полиномы Лежандра.

При нахождении функции $q_n(\lambda)$ мы воспользовались свойством ортогональности полиномов Лежандра.

В дальнейшем нам потребуются только функции $q_0(\lambda),\ q_1(\lambda)$:

$$q_0(\lambda) = -\frac{c^2}{2\lambda_* T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\lambda^2 + x^2\right) q_p(\lambda, x)\ dx,$$

$$q_1(\lambda) = -\frac{3c^2}{2\lambda_* T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\lambda^2 + x^2\right) q_p(\lambda, x)\ x\ dx.$$

Перейдем теперь к левой части. Решение для t_{p1} будем искать в виде

$$t_{p1}(\lambda, x) = \frac{1}{t_{p0}^{\omega}(\lambda)}\Phi_{p1}(\lambda, x). \tag{4.7}$$

Подставляя выражения (4.5), (4.7) в уравнение (4.3) до первого порядка малости по ε включительно, получаем два уравнения из которых определяются функции t_{go}, Φ_{p1}:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[(1+\lambda^2)\frac{dt_{p0}^{1+\omega}}{d\lambda}\right] = (1+\omega) q_0(\lambda), \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(1+\lambda^2)\frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial x}\right]=q_1(\lambda)\ x. \tag{4.9}$$

Найдем сначала решение уравнения (4.8):

$$\frac{d^2\Phi_{p0}}{d\lambda^2}+\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\frac{d\Phi_{p0}}{d\lambda}=\frac{(1+\omega)}{1+\lambda^2}q_0(\lambda),\Phi_{p0}(\lambda)=t_{p0}^{1+\omega}(\lambda). \tag{4.10}$$

Фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (4.10), имеет вид

$$\psi_1(\lambda)=1,\quad \psi_2(\lambda)=\operatorname{arcctg}\lambda,\ W\left(\psi_1,\psi_2\right)=-\frac{1}{1+\lambda^2},$$

где $W-$ определитель Вронского.

Тогда запишем общее решение неоднородного уравнения (4.10):

$$t_{p0}(\lambda)=\Bigg(B_0+C_0\operatorname{arcctg}\lambda+(1+\omega)\big[\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}q_0\operatorname{arcctg}\lambda\ d\lambda-$$

$$-\operatorname{arcctg}\lambda\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}q_0\ d\lambda\big]\Bigg)^{1/(1+\omega)}. \tag{4.11}$$

Произвольная постоянная C_0 определяется из краевого условия (4.4):

$$C_0=(1+\omega)\int\limits_{\lambda_0}^{0}q_0\ d\lambda,$$

которую можно выразить через интеграл по объему сфероида. Учитывая, что дифференциальный элемент объема в системе координат сплюснутого сфероида $dV=c^3\left(\operatorname{ch}^2\tau-\sin^2\eta\right)\operatorname{ch}\tau\sin\eta d\tau d\eta d\phi$, имеем

$$C_0=\frac{(1+\omega)}{4\pi c\lambda_*T_\infty}\int\limits_V q_p(\tau,\eta)\ dV.$$

Рассмотрим теперь уравнение (4.9) для определения функции Φ_{p1}:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(1+\lambda^2)\frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial x}\right]=q_1(\lambda)\ x. \tag{4.12}$$

Решение уравнения (4.12) будем искать в виде

$$\Phi_{p1}(\lambda,x)=\tau_p(\lambda)x+d_0,\ \ d_0=const, \tag{4.13}$$

и после подстановки выражения (4.13) в уравнение (4.12), имеем

$$\frac{d^2\tau_p}{d\lambda^2}+\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\frac{d\tau_p}{d\lambda}-\frac{2}{1+\lambda^2}\tau_p=\frac{q_1}{1+\lambda^2}. \tag{4.14}$$

Далее поступаем аналогично, как и в случае решения уравнения (4.10). Фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (4.14), имеет вид

$$\psi_3(\lambda)=\lambda,\quad \psi_4(\lambda)=\lambda\operatorname{arcctg}\lambda-1,\quad W\left(\psi_3,\psi_4\right)=\frac{1}{1+\lambda^2},$$

и тогда запишем общее решение неоднородного уравнения (4.14):

$$\tau_p(\lambda)=B_1\lambda+C_1\left(1-\lambda\operatorname{arcctg}\lambda\right)-\lambda\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\left(\lambda\operatorname{arcctg}\lambda-1\right)\ q_1(\lambda)\ d\lambda+$$

$$+\left(\lambda\operatorname{arcctg}\lambda-1\right)\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\lambda q_1(\lambda)\ d\lambda. \tag{4.15}$$

Произвольная постоянная C_1 определяется из краевого условия (4.4):

$$C_1=\int\limits_{\lambda_0}^{0}\lambda q_1\ d\lambda,$$

ее также можно выразить через интеграл по объему сфероида:

$$C_1=\frac{3}{4\pi c^2\lambda_*T_\infty}\int\limits_V q_p(\tau,\eta)\,z\ dV,\quad z=c\operatorname{sh}\tau\cos\eta.$$

где $\int\limits_V q_p(\tau,\eta)z\ dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников.

Постоянная d_0 определяется из краевых условий на поверхности частицы, сформулированных в задачах 4 и 5, рассмотренных в 4 главе диссертации, для описания таких физических явлений как термо- и фотофорез.

Следовательно первое приближение для поля температуры, удовлетворяющее краевому условию (4.4), имеет следующий вид:

$$t_{p1}(\lambda,x)=\frac{d_0}{t_{p0}^{\omega}}+\frac{x}{t_{p0}^{\omega}}\Bigg\{B_1\lambda+C_1\left(1-\lambda\operatorname{arcctg}\lambda\right)-$$

$$-\lambda\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\left(\lambda\operatorname{arcctg}\lambda-1\right)\ q_1(\lambda)\ d\lambda+\left(\lambda\operatorname{arcctg}\lambda-1\right)\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\lambda q_1(\lambda)\ d\lambda\Bigg\}. \tag{4.16}$$

Таким образом, мы нашли решение уравнения, описывающего поле температуры внутри неравномерно нагретой частицы сфероидальной формы, с учетом степенного вида зависимости коэффициента теплопроводности частицы от температуры, удовлетворяющее краевому условию конечности температуры внутри частицы.

4.2 Термофоретическое движение неравномерно нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы

В опубликованных до настоящего времени работах по теории термофореза (см. обзор литературы по термофорезу (глава 1)) это явление хорошо изучено при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы. В научной литературе имеется мало работ, посвященных исследованию движения частиц при значительных относительных перепадах температуры в газообразных средах, в частности рассматривались, например, гравитационное движение нагретых частиц [57, 76], фотофорез нагретых частиц [77], термофорез крупных нагретых частиц [78]. В этих работах показано, что нагрев поверхности частиц существенно влияет на их движение.

4.2.1 *Постановка задачи*

Классическая задача о термофоретическом движении частицы в газообразной среде формулируется следующим образом: рассматривается частица, взвешенная в газообразной среде, в которой с помощью внешних источников поддерживается постоянный малый градиент температуры ∇T_g. Под действием градиента температуры частица начинает двигаться. Когда термофоретическая сила становится равной по величине силе сопротивления среды, она начинает двигаться равномерно со скоростью, называемой термофоретической $\mathbf{U}_t$. Удобно рассматривать термофорез в системе координат, связанной с центром масс частицы; вектор ∇T_g направляют вдоль оси симметрии (обычно это ось Oz). Поскольку система отсчета связана с центром движущейся аэрозольной частицы, то задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа, скорость которого $\mathbf{U}_\infty$ подлежит определению ($\mathbf{U}_\infty \parallel Oz$). Распределения скоростей, давлений и температур обладают аксиальной симметрией относительно оси Oz. При указанном выборе начала системы координат частицу можно считать неподвижной, а внешнюю среду (газ) – движущейся в сторону, противоположную направлению фактического движения частицы со скоростью $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_t$. Далее решается система газодинамических уравнений, включающая линеаризованную по скорости систему уравнений Навье-Стокса, уравнения теплопроводности, описывающие поля температур вне и внутри частицы, совместно с краевыми условиями (см. главу 1). Задача заключается в нахождении величины силы и скорости термофореза и их анализе.

В диссертационном исследовании задача о термофорезе формулируется следующим образом. Рассмотрим твердую неравномерно нагретую крупную аэрозольную частицу сфероидальной формы, взвешенную в газе с плотностью ρ_∞, теплопроводностью λ_∞ и вязкостью μ_∞. С помощью внешних источников в газе поддерживается постоянный малый градиент температуры ∇T_g, направленный вдоль оси симметрии сфероида Oz (ось Oz направлена горизонтально). При теоретическом описании термофореза предполагаются справедливыми допущения, рассмотренные в первой главе (параграф 1.3). Нагретая частица передает тепло окружающей ее газообразной среде. Это приводит к тому, что коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность) и плотность газообразной среды не являются уже постоянными величинами, а зависят от температуры и, следовательно, существенно изменяются тепловые и гидродинамические поля в окрестности нагретой частицы, что в конечном итоге влияет не только на силу сопротивления, которое оказывает газообразная среда на движущуюся в ней частицу, но и на силу и скорость термофореза. Задача заключается в нахождении аналитических выражений для силы и скорости термофореза.

Перейдем теперь к математической формулировке задачи.

Задача 4. Крупная неравномерно нагретая твердая сфероидальная частица занимает ограниченную область Ω_p евклидова пространства R^3, в которой с помощью внешних источников поддерживается постоянный малый градиент температуры ∇T_g. Требуется найти выражения, учитывающие влияние движения вязкой неизотермической газообразной среды на силу $\mathbf{F_t}(\tau,\eta)$ и скорость $\mathbf{U_t}(\tau,\eta)$ термофореза, удовлетворяющие линеаризованной по скорости системе уравнений Навье-Стокса (1.17) — (1.21), системе уравнений, описывающей распределение поля температуры вне и внутри частицы и краевым условиям (4.17) — (4.20); (4.21) — (4.24), в системе координат сплюснутого сфероида и провести качественные оценки влияния движения среды (учет конвективного члена в уравнении теплопроводности) на силу и скорость термофореза

$$\lim_{\tau\to\tau_0} U_\tau\left(\tau,\eta\right)=0, \tag{4.17}$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0} U_\eta\left(\tau,\eta\right)=\lim_{\tau\to\tau_0}\left(K_{ts}\frac{\mu_g\left(\tau,\eta\right)}{\rho_g\left(\tau,\eta\right)T_g\left(\tau,\eta\right)H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\frac{\partial T_g\left(\tau,\eta\right)}{\partial\eta}\right), \tag{4.18}$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0} T_g\left(\tau,\eta\right)=\lim_{\tau\to\tau_0} T_p\left(\tau,\eta\right), \tag{4.19}$$

$$-\lim_{\tau\to\tau_0}\left(\frac{\lambda_g\left(\tau,\eta\right)}{H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\frac{\partial T_g\left(\tau,\eta\right)}{\partial\tau}\right)=$$

$$=-\lim_{\tau\to\tau_0}\left(\frac{\lambda_p\left(\tau,\eta\right)}{H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\frac{\partial T_p\left(\tau,\eta\right)}{\partial\tau}+\sigma_0\sigma_1(T_p^4\left(\tau,\eta\right)-T_\infty^4)\right). \tag{4.20}$$

В качестве краевых условий на бесконечности, т.е. вдали от сфероидальной частицы ($\tau\to\infty$) справедливы стандартные условия:

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(U_\tau\left(\tau,\eta\right)-U_\infty\frac{c\ \mathrm{ch}\,\tau}{H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\cos\eta\right)=0, \tag{4.21}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(U_\eta\left(\tau,\eta\right)+U_\infty\frac{c\ \mathrm{sh}\,\tau}{H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\sin\eta\right)=0, \tag{4.22}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} P_g=P_\infty\,,\ \lim_{\tau\to\infty}\Big(T_g\left(\tau,\eta\right)-c|\nabla\ T_g|\,\mathrm{sh}\,\tau\cos\eta\Big)=T_\infty\,. \tag{4.23}$$

Конечность физических величин, характеризующих частицу при $\tau\to 0$, учтена в (4.24)

$$\lim_{\tau\to 0} T_p\left(\tau,\eta\right)<\infty, \tag{4.24}$$

где σ_0 – интегральная степень черноты, σ_1 – постоянная Стефана-Больцмана, $U_\infty=|\mathbf{U}_\infty|$.

В краевых условиях на поверхности частицы учтено: непротекание молекул газа через поверхность для нормальной компоненты U_τ и тепловое скольжение для касательной компоненты U_η (4.17) –(4.18); равенство температур и непрерывность радиального теплового потока с учетом излучения (4.19) – (4.20).

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные ρ_∞, c_{pg}, λ_∞, μ_∞ и сохраняющиеся в процессе движения частицы T_∞, a, b, $|\nabla T_g|$ и U_∞. Из этих параметров, кроме числа Рейнольдса ($Re_\infty = c\,U_\infty\,\rho_\infty/\mu_\infty$) и числа Пекле ($Pe = Re_\infty\,Pr_\infty$, $Pr_\infty = c_{pg}\,\mu_\infty/\lambda_\infty$–число Прандтля), имеется еще один малый контролируемый параметр $\zeta = a|\nabla T_g|/T_\infty$, характеризующий перепад температуры на размере частицы (a – наибольшая полуось сфероида). По порядку величины характерная скорость при термофоретическом движении $U \sim \mu_\infty|\nabla\ T_g|/(\rho_\infty T_\infty)$ и число Рейнольдса, построенное по этой характерной скорости, совпадает с малым параметром $\zeta = a|\nabla T_g|/T_\infty$. Действительно, скорость частицы в поле градиента температуры по порядку величины равна $\dfrac{\mu_\infty}{\rho_\infty T_\infty}\dfrac{\Delta T_g}{L} \sim \dfrac{\mu_\infty}{\rho_\infty T_\infty}\,|\nabla T_g|$ [140], где $\dfrac{\Delta T_g}{L}$– средний градиент температуры вдали от частицы. Этот градиент равен отношению перепада температуры ΔT_g на конечном отрезке L к величине этого отрезка. Скорость термофореза равна с обратным знаком скорости центра инерции газовой среды на большом расстоянии от частицы, поэтому $|\mathbf{U_t}| \sim \dfrac{\mu_\infty}{\rho_\infty T_\infty}\dfrac{\Delta T_g}{L} = \dfrac{\mu_\infty}{\rho_\infty a}\zeta$. Тогда число Рейнольдса, построенное по характерной скорости, равно $Re_\infty = a\,U\,\rho_\infty/\mu_\infty = \zeta$, т.е. для термофореза роль малого параметра играет число ζ.

Обезразмерим температуру и скорость следующим образом: $t_g = T_g/T_\infty$, $t_p = T_p/T_\infty$, $\mathbf{V_g} = \mathbf{U_g}/U$.

Решение уравнений газовой динамики и теплопереноса будем искать в виде разложения по малому параметру ζ:

$$\mathbf{V_g} = \mathbf{V_g}^{(0)} + \zeta\mathbf{V_g}^{(1)} + ...,\ \ P_g = P_g^{(0)} + \zeta P_g^{(1)} + ..., \tag{4.25}$$

$$t_g = t_g^{(0)} + \zeta t_g^{(1)} + ...,\ \ t_p = t_p^{(0)} + \zeta t_p^{(1)} + ... \tag{4.26}$$

4.2.2 *Определение термофоретической силы и скорости крупной нагретой твердой частицы сфероидальной формы. Анализ полученных результатов.*

При нахождении силы и скорости термофореза ограничиваются до первой поправки малости по ζ. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Исследования, проведенные в диссертации, показали, что при рассмотрении влияния движения среды на термофорез крупной нагретой частицы сфероидальной формы удобно рассматривать движение частицы в системе координат в мгновенном положении центра масс частицы. В этом случае газ на бесконечности покоится, а сама частица движется с характерной скоростью $\mathbf{U} = -\mathbf{U}_\infty$, где $|\mathbf{U}| = |\mathbf{U}_\infty|$. Решая уравнение теплопроводности методом теории возмущений (глава 3), имеем:

$$t_g(\lambda, x) = t_{g0}(\lambda) + \zeta t_{g1}(\lambda, x), \;\; t_p(\lambda, x) = t_{p0}(\lambda) + \zeta t_{p1}(\lambda, x), \tag{4.27}$$

где

$$t_{g0}(\lambda) = \left(1 + \frac{M_0}{c}\mathrm{arcctg}\lambda\right)^{\dfrac{1}{1+\alpha}}, \tag{4.28}$$

$$t_{g1}(\lambda, \eta) = \frac{\cos\eta}{t_{g0}^{\alpha}(\lambda)}\left[\frac{c}{a}\lambda + M_1\big(\lambda\mathrm{arcctg} - 1\big) + \Omega\Big(A_1\chi_3(\lambda) + A_2\chi_4(\lambda)\Big)\right], \tag{4.29}$$

$$t_{p0}(\lambda) = \Bigg(B_0 + C_0\,\mathrm{arcctg}\,\lambda + (1+\omega)\big[\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} q_0\,\mathrm{arcctg}\,\lambda\; d\lambda -$$

$$- \mathrm{arcctg}\,\lambda \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} q_0\; d\lambda\big]\Bigg)^{1/(1+\omega)}, \tag{4.30}$$

$$t_{p1}(\lambda, x) = \frac{\cos\eta}{t_{p0}^{\omega}}\Bigg\{B_1\lambda + C_1\left(1 - \lambda\,\mathrm{arcctg}\,\lambda\right) -$$

$$-\lambda\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\left(\lambda\,\mathrm{arcctg}\,\lambda - 1\right)\; q_1(\lambda)\; d\lambda + \left(\lambda\,\mathrm{arcctg}\,\lambda - 1\right)\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\lambda q_1(\lambda)\; d\lambda\Bigg\}. \tag{4.31}$$

$$C_0 = \frac{a\,b(1+\omega)}{3\lambda_* T_\infty}\sqrt{1+\lambda_0^2}\,I_0, \;\; I_0 = \frac{1}{V}\int\limits_V q_p(\tau, \eta)\; dV, \; V = \frac{4}{3}\pi a^2 b,$$

$$C_1 = \frac{b\left(1+\lambda_0^2\right)}{\lambda_* T_\infty}I_1, \;\; I_1 = \frac{1}{V}\int\limits_V q_p(\tau, \eta) z\; dV, \; z = c\,\mathrm{sh}\,\tau\cos\eta,$$

$$q_0(\lambda) = -\frac{c^2}{2\lambda_* T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\lambda^2 + x^2\right) q_p\; dx, \;\; q_1(\lambda) = -\frac{3c^2}{2\lambda_* T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\lambda^2 + x^2\right) q_p\; x\; dx,$$

$t_p(\lambda,x) = T_p(\lambda,x)/T_\infty$, $\int\limits_V q_p(\tau,\eta)z\ dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников.

Входящие в выражения t_{g0}, t_{g1}, t_{p0}, t_{p1} постоянные интегрирования определяются из краевых условий на поверхности частицы (4.19)-(4.20), которые необходимо линеаризовать согласно выражениям (4.27). С учетом этого линеаризованные краевые условия принимают вид:

— для нулевых приближений

$$t_{g0}(\lambda) = t_{p0}(\lambda), \tag{4.32}$$

$$\frac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}\frac{dt_{g0}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dt_{p0}(\lambda)}{d\lambda} + \sigma_0\sigma_1\frac{T_\infty^3}{\lambda_p^{(s)}}h_0(\lambda_0)\left(t_{p0}^4(\lambda) - 1\right), \tag{4.33}$$

— для первых приближений

$$t_{g1}(\lambda,x) = t_{p1}(\lambda,x), \tag{4.34}$$

$$\frac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}\left(\frac{\partial t_{g1}(\lambda,x)}{\partial\lambda} + \alpha\frac{t_{g1}(\lambda,x)}{t_{g0}(\lambda)}\frac{dt_{g0}(\lambda)}{d\lambda}\right) = \frac{\partial t_{p1}(\lambda,x)}{\partial\lambda} + \tag{4.35}$$

$$+\omega\frac{t_{p1}(\lambda,x)}{t_{p0}(\lambda)}\frac{dt_{p0}(\lambda)}{d\lambda} + 4\sigma_0\sigma_1\frac{T_\infty^3 t_{p0}^3(\lambda)}{\lambda_p^{(s)}}h_0(\lambda_0)t_{p1}(\lambda,x).$$

Здесь $\lambda_g^{(s)} = \lambda_\infty t_{gS}^\alpha$, $\lambda_p^{(s)} = \lambda_* t_{pS}^\omega$, $t_{gS} = t_{g0}(\lambda = \lambda_0)$, $t_{pS} = t_{p0}(\lambda = \lambda_0)$.

При нахождении нулевых и первых приближений необходимо учесть, что

$$\frac{c\sqrt{\lambda^2 + x^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\lambda)P_n(x),$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра. Умножая данное равенство на $P_m(x)$ и интегрируя его по отрезку $[-1;1]$, в силу ортогональности полиномов Лежандра

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, m = n \end{cases}$$

будем иметь

$$h_n(\lambda) = c\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{\lambda^2 + x^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}P_n(x)\ dx. \tag{4.36}$$

В дальнейшем нам потребуются только $h_0(\lambda_0)$ и $h_1(\lambda_0)$:

$$h_0(\lambda_0) = \frac{c}{2}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\lambda^2+x^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,dx = \frac{c}{2}\left(1+\frac{\lambda_0^2}{2\sqrt{1+\lambda_0^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\lambda_0^2}+1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}-1}\right|\right),$$

$$h_1(\lambda_0) = \frac{3c}{2}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{x\sqrt{\lambda^2+x^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,dx = 0.$$

Учитывая, что

$$\left.\frac{dt_{g0}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = -\frac{M_0}{c}\frac{1}{(1+\alpha)(1+\lambda_0^2)t_{gS}^{\alpha}},$$

$$\left.\frac{dt_{p0}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = -\frac{C_0}{(1+\omega)(1+\lambda_0^2)t_{pS}^{\omega}}.$$

Среднее значение температуры поверхности частицы T_{pS} определяется из решения следующей системы уравнений, в которой $T_{pS} = t_{pS}T_\infty$:

$$\left\{\begin{array}{c} t_{gS} = t_{pS},\ \dfrac{M_0}{c} = \dfrac{t_{gS}^{1+\alpha}-1}{\operatorname{arcctg}\lambda_0}, \\ \dfrac{\lambda_\infty}{1+\alpha}\dfrac{t_{gS}^{1+\alpha}-1}{\operatorname{arcctg}\lambda_0} = \dfrac{ab\sqrt{1+\lambda_0^2}}{3T_\infty}I_0 - \sigma_0\sigma_1 T_\infty^3 h_0(\lambda_0)(1+\lambda_0^2)(t_{gS}^4-1). \end{array}\right. \tag{4.37}$$

где $I_0 = \dfrac{1}{V}\int\limits_V q_p(\tau,\eta)\,dV,\ V = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b$, интегрирование ведется по всему объему частицы.

Из системы (4.37) видно, что на среднее значение температуры поверхности частицы T_{pS} существенное влияние оказывает не только плотность тепловых источников q_p, но и форма поверхности частицы, интегральная степень черноты, а также форм-фактор поверхности $\lambda_0 = \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}$.

В дальнейшем из системы для первых приближений нам потребуется только коэффициент M_1, который имеет следующий вид:

$$\frac{M_1}{t_{gS}^{\alpha}} = \frac{c}{a}\frac{1}{t_{gS}^{\alpha}\delta}\left(\frac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}} - n_0\right) + \frac{\Omega}{\delta\, t_{gS}^{\alpha}}\left[A_1\left(\frac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}\chi_3'(\lambda_0) - \frac{n_0}{\lambda_0}\chi_3(\lambda_0)\right)+\right.$$
$$\left. + A_2\left(\frac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}\chi_4'(\lambda_0) - \frac{n_0}{\lambda_0}\chi_4(\lambda_0)\right)\right], \tag{4.38}$$

где $\delta = \dfrac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}\dfrac{\lambda_0}{1+\lambda_0^2} + \left(n_0 - \dfrac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}\right)\operatorname{arcctg}\lambda_0 - \dfrac{n_0}{\lambda_0}$, $n_0 = 1 + 4\sigma_0\sigma_1 \dfrac{T_\infty^3 t_{pS}^3(\lambda_0)}{\lambda_p^{(s)}(\lambda_0)} h_0$.

В выражение для общей силы входят коэффициенты A_1 и A_2, которые определяются из краевых условий на поверхности частицы для компонент $U_\tau(\tau,\eta)$ и $U_\eta(\tau,\eta)$:

$$A_1 = \frac{G_2(\lambda_0)\Omega_2(\lambda_0) - G_3(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)} A_3 - K_{tS}\frac{\zeta}{U_\infty}\frac{c\,\nu_g^{(s)}(\lambda_0)}{a^2 t_{gS}^{1+\alpha}(\lambda_0)}\frac{G_2(\lambda_0)}{\delta(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\lambda_g^{(s)}(\lambda_0)}{\lambda_p^{(s)}(\lambda_0)}\frac{c}{a}\frac{1}{\left(1+\lambda_0^2\right)} + \Omega\frac{\lambda_g^{(s)}(\lambda_0)}{\lambda_p^{(s)}(\lambda_0)} A_3 \frac{G_3(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)}\left[\Phi_1(\lambda_0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\Omega_2(\lambda_0)}{\Omega_1(\lambda_0)}\frac{G_1(\lambda_0)\Phi_2(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)\Phi_1(\lambda_0)}{G_3(\lambda_0)}\right]\right\}, \tag{4.39}$$

$$A_2 = -\frac{\Omega_2(\lambda_0)}{\Omega_1(\lambda_0)} A_3 + K_{tS}\frac{\zeta}{U_\infty}\frac{c\,\nu_g^{(s)}(\lambda_0)}{a^2 t_{gS}^{1+\alpha}(\lambda_0)}\frac{G_1(\lambda_0)}{\delta(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)}\left\{\frac{\lambda_g^{(s)}(\lambda_0)}{\lambda_p^{(s)}(\lambda_0)}\frac{c}{a}\frac{1}{\left(1+\lambda_0^2\right)} + \right.$$

$$\left. + \Omega\frac{\lambda_g^{(s)}(\lambda_0)}{\lambda_p^{(s)}(\lambda_0)} A_3 \frac{G_3(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)}\left[\Phi_1(\lambda_0) + \frac{\Omega_2(\lambda_0)}{\Omega_1(\lambda_0)}\frac{G_1(\lambda_0)\Phi_2(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)\Phi_1(\lambda_0)}{G_3(\lambda_0)}\right]\right\}. \tag{4.40}$$

Здесь индексом "s" обозначены значения физических величин, взятые при средней относительной температуре поверхности частицы T_{pS}, определяемой формулой (4.37), $\Omega_1(\lambda_0) = G_5(\lambda_0)G_1(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)G_4(\lambda_0)$, $\Omega_2(\lambda_0) = G_6(\lambda_0)G_1(\lambda_0) - G_3(\lambda_0)G_4(\lambda_0)$, $A_3 = c^2/a^2$, $\Phi_k(\lambda_0) = \chi'_{k+2}(\lambda_0)(\lambda_0 \operatorname{arcctg}\lambda_0 - 1) + \chi_{k+2}(\lambda_0)\left(\dfrac{\lambda_0}{1+\lambda_0^2} - \operatorname{arcctg}\lambda_0\right)$, $k = 1, 2$, $G_4(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left(G_1'(\lambda) - f(\lambda)G_1(\lambda)\right)$, $G_5(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left(G_2'(\lambda) - f(\lambda)G_2(\lambda)\right)$, $G_6(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left(G_3'(\lambda) - f(\lambda)G_3(\lambda)\right)$, индекс "$'$"означает производные по λ от соответствующих функций.

При подстановке в выражение для общей силы, действующей на частицу, компонентов тензора напряжений, с учетом полученных выражений компонентов массовой скорости, и после интегрирования получаем:

$$F_z = -\frac{\pi\mu_\infty U_\infty a^2}{c}\left(1+\lambda_0^2\right)^2\left[A_1 N_1(\lambda_0) + A_2 N_2(\lambda_0)\right], \tag{4.41}$$

где коэффициенты A_1, A_2 – произвольные постоянные, вид функций $N_i(\lambda)$, $i = 1, 2$ приведен во второй главе.

Из формулы (4.41) видим, что общая сила выражается через коэффициенты A_1 и A_2 и после их подстановки получаем, что общая сила будет складываться из силы вязкого сопротивления среды $\mathbf{F}_\mu$, термофоретической силы $\mathbf{F}_{th}$ и силы $\mathbf{F}_{tmh}$, связанной с движением среды (учет конвективного члена в уравнении теплопроводности):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_\mathbf{t}, \quad \mathbf{F}_\mathbf{t} = \mathbf{F}_{th} + \mathbf{F}_{tmh}, \tag{4.42}$$

где

$$\mathbf{F}_\mu = 6\pi a \mu_\infty f_\mu U_\infty \mathbf{n}_z, \tag{4.43}$$

$$\mathbf{F}_{th} = -6\pi a \mu_\infty f_{th} \frac{|\nabla T_g|}{T_\infty} \mathbf{n}_z, \tag{4.44}$$

$$\mathbf{F}_{tmh} = -6\pi a \mu_\infty f_{tmh} \frac{|\nabla T_g|}{T_\infty} \mathbf{n}_z, \tag{4.45}$$

здесь $\mathbf{n}_z$– единичный вектор в направлении оси Oz,

$$f_\mu = \frac{b}{a} \frac{(1+\lambda_0^2)^2}{6\lambda_0 G_1(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)} [G_1(\lambda_0)\Omega_2(\lambda_0)N_2(\lambda_0) -$$

$$-N_1(\lambda_0)\big(G_2(\lambda_0)\Omega_2(\lambda_0) - G_3(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)\big)], \tag{4.46}$$

$$f_{th} = K_{tS} \frac{b}{a} \frac{\nu_g^{(s)}(\lambda_0)}{t_{gS}^{1+\alpha}(\lambda_0)} \frac{\lambda_g^{(s)}(\lambda_0)}{\lambda_p^{(s)}(\lambda_0)} \frac{G_1(\lambda_0)N_2(\lambda_0)}{\delta(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)} \left(1 - \frac{G_2(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)} \frac{N_1(\lambda_0)}{N_2(\lambda_0)}\right) \frac{1+\lambda_0^2}{6\lambda_0}, \tag{4.47}$$

$$f_{tmh} = K_{tS} \frac{b}{a} \frac{\nu_g^{(s)}(\lambda_0)}{t_{gS}^{1+\alpha}(\lambda_0)} \frac{\lambda_g^{(s)}(\lambda_0)}{\lambda_p^{(s)}(\lambda_0)} \frac{G_3(\lambda_0)N_2(\lambda_0)}{\delta(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)} \left(1 - \frac{G_2(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)} \frac{N_1(\lambda_0)}{N_2(\lambda_0)}\right) \times$$

$$\times \frac{\left(1+\lambda_0^2\right)^2}{6\lambda_0} \frac{M_0}{c} \frac{Pr_\infty}{1+\alpha} \left[\Phi_1(\lambda_0) + \frac{\Omega_2(\lambda_0)}{\Omega_1(\lambda_0)} \frac{G_1(\lambda_0)\Phi_2(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)\Phi_1(\lambda_0)}{G_3(\lambda_0)}\right]. \tag{4.48}$$

Приравнивая полную силу $\mathbf{F}$ к нулю, получаем следующее выражение для скорости упорядоченного движения нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы в поле градиента температуры $\mathbf{U}_t = -\mathbf{U}_\infty$:

$$\mathbf{U}_t = -\big(h_{th} + h_{tmh}\big) \frac{|\nabla T_g|}{T_\infty} \mathbf{n}_z, \; h_{th} = f_{th}/f_\mu, \; h_{tmh} = f_{tmh}/f_\mu, \tag{4.49}$$

В данной главе впервые построена теория термофоретического движения нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы с учетом влияния на ее движение конвективного члена в уравнении теплопроводности в вязкой неизотермической газообразной среде.

Формулы (4.42), (4.49) позволяют оценивать силу сопротивления, которую испытывает частица при движении в вязкой неизотермической газообразной среде, в которой с помощью внешних источников поддерживается малый постоянный градиент температуры, а также влияние движения среды (учета конвективного члена в уравнении теплопроводности) на величину силы и скорости термофореза, когда средняя температура ее поверхности по величине существенно отличается от температуры газообразной среды вдали от нее с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Заменив в вышеполученных результатах λ на $i\lambda$ и c на ic, мы получаем результаты для частицы, имеющей форму вытянутого сфероида.

Поскольку нами получены выражения для силы сопротивления нагретой сфероидальной частицы, то мы можем рассмотреть и другие предельные случаи сопротивления нагретых несферических частиц. При $\lambda \to \infty$ сплюснутый сфероид вырождается в плоский бесконечно тонкий диск. Если главная ось a вытянутого сфероида много больше экваториального радиуса b, сфероид вырождается в длинный тонкий стержень. Если полуось a незначительно по величине отличается от полуоси b, то мы получаем слабо деформированную сферу и т.д. Таким образом, формулы (4.42), (4.49) позволяют нам оценить величину силы сопротивления нагретых несферических частиц (плоский тонкий диск, длинный тонкий стержень, слабо деформированную сферу), движущихся в вязкой неизотермической газообразной среде.

Рассмотрим предельные переходы полученных формул для силы и скорости термофореза. В случае, если $f_{tmh} = 0$, формулы переходят в обычный термофорез крупной нагретой твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы. При $M_0 \to 0$ формулы (4.42), (4.49) переходят в выражения для силы и скорости термофореза в случае малых относительных перепадов температуры в окрестности сфероидальной частицы, полученные в работе [82]. В пределе при $c \to 0$, $\lambda \to \infty$ так, что $r = c\,\lambda$ остается постоянным, сфероидальные координаты переходят сферические координаты r, θ, φ [46]. Таким образом, совершая предельный переход в наших формулах, мы получаем выражения для обычного термофореза нагретой аэрозольной частицы сферической формы, например, в работе [70].

Проведем качественную оценку вклада движения среды по отношению к обычному термофорезу. Для это найдем отношение f_{tmh}/f_{th}:

$$\frac{f_{tmh}}{f_{th}} = \frac{G_3(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)} \frac{\lambda_0}{b} \frac{M_0}{c} \frac{Pr_\infty}{1+\alpha} \times$$

$$\times \left[\Phi_1(\lambda_0) + \frac{\Omega_2(\lambda_0)}{\Omega_1(\lambda_0)} \frac{G_1(\lambda_0)\Phi_2(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)\Phi_1(\lambda_0)}{G_3(\lambda_0)} \right]. \tag{4.50}$$

Из формулы (4.50) видим, что это отношение не только пропорционально $\frac{M_0}{c}\frac{Pr_\infty}{1+\alpha}$, т.е. произведению числа Прандтля на относительный перепад температуры в окрестности частицы, но и от функций G_3, G_2, G_1, Ω_2, Ω_2, , Φ_1, Φ_2. Явный вид этих функций приведен в главе 3. Отсюда следует, что движение среды оказывает влияние на обычный термофорез.

Заметим, что для большинства газов число Прандтля порядка единицы и тогда $\frac{M_0}{c}$ пропорционально средней температуре поверхности частицы, определяемой из решения системы уравнений (4.37), т.е.

$$\begin{cases} t_{gS} = t_{pS}, \ \dfrac{M_0}{c} = \dfrac{t_{gS}^{1+\alpha} - 1}{\operatorname{arcctg} \lambda_0}, \\ \dfrac{\lambda_\infty}{1+\alpha} \dfrac{t_{gS}^{1+\alpha} - 1}{\operatorname{arcctg} \lambda_0} = \dfrac{ab\sqrt{1+\lambda_0^2}}{3T_\infty} I_0 - \sigma_0 \sigma_1 T_\infty^3 h_0(\lambda_0)(1+\lambda_0^2)(t_{gS}^4 - 1). \end{cases} \tag{4.51}$$

Здесь $T_{pS} = t_{pS} T_\infty$, $T_{gS} = t_{gS} T_\infty$, $t_{pS} = t_{p0}(\lambda = \lambda_0)$, $t_{gS} = t_{g0}(\lambda = \lambda_0)$, $I_0 = \frac{1}{V} \int\limits_V q_p(\tau, \eta)\, dV$, $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$, интегрирование ведется во всему объему частицы.

Из системы (4.51) видно, что на среднее значение температуры поверхности частицы T_{pS} существенное влияние оказывает плотность тепловых источников q_p, входящих в выражение I_0.

Чтобы провести численные оценки влияния движения среды на силу и скорость обычного термофореза, необходимо задать явный вид плотности тепловых источников, т.е. конкретизировать природу тепловых источников, за счет которых происходит нагрев поверхности частицы. Как мы отмечали в обзоре литературы, природа их может быть различной. Если, например, частица поглощает падающее на нее излучение интенсивностью I, плотность тепловых источников (распределение энергии по объему частицы) находится из решения электродинамической задачи Ми [20]. В случае частицы сферической формы объемная плотность внутренних источников тепла определяется по формуле, например, [17] – [18]

$$q_p(\mathbf{r}) = 2\pi\chi_o k_o I B_0(\mathbf{r}), \tag{4.52}$$

где

$$B_0(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{|E(r,\theta,\varphi)|^2}{E_0^2}d\varphi -$$

безразмерная функция источников электромагнитной энергии падающего излучения; $E(r,\theta,\varphi)$ – локальная напряженность электрического поля внутри частицы; E_0 – амплитуда напряженности поля в падающей волне; $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; $m(\lambda) = n + i\chi_o$ – комплексный показатель преломления вещества частицы для данной волны излучения. Для вычисления безразмерной функции источников $B_0(\mathbf{r})$ пользуются решением задачи Ми для внутреннего поля (например, [20], [73]).

Обычно в качестве численных оценок рассматривают наиболее простой случай, когда частица поглощает падающее излучение как черное тело, т.е. поглощение излучения происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. В этом случае

$$q_p(\tau,\eta) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{ch}\tau\cos\eta}{c(\operatorname{ch}^2\tau - \sin^2\eta)\delta\tau}I, \dfrac{\pi}{2} \le \eta \le \pi, \tau_0 - \delta\tau \le \tau \le \tau_0, \\ 0, \;\; 0 \le \eta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{4.53}$$

и тогда

$$\int\limits_V q_p\, dV = \pi I c^2\lambda_0^2\big(1 + \frac{1}{\lambda_0^2}\big).$$

В диссертационном исследовании акцент делается на качественные оценки, поскольку задача Ми не решается (это выходит за рамки диссертационного исследования) и поэтому далее поступим следующим образом. На основании выражений (4.47) и (4.48) нам необходимо оценить выражение $\left[1 + \dfrac{t_{gS}^{1+\alpha} - 1}{\operatorname{arcctg}\lambda_0}\dfrac{\mathrm{Pr}_\infty(1+\lambda_0^2)}{1+\alpha}\right]$ по отношению к единице (обычный термофорез);

$\alpha_{max} = 1$, $Pr_\infty \approx 1$, $\lambda_0 = \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}$, $t_{gS} = T_{gS}/T_\infty$, $T_\infty = 273\,K$, $T_{gS} = 273 \div 1000\,K$. Качественный анализ, проведенный в диссертации, показал, что движение среды значительно влияет на силу и скорость термофореза и дает примерно вклад от 20% до 40% в зависимости от отношения полуосей сфероида.

4.3 Особенности фотофоретического движения неравномерно нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы

Механизм возникновения явления фотофореза, его особенности и приложения в промышленности, технике, медицине и т.д. описан и во введении, и в начале этой главы. Поэтому мы перейдем к постановке задачи.

4.3.1 *Постановка задачи*

Классическая задача о фотофоретическом движении аэрозольной частицы формулируется следующим образом. До момента времени $t = 0$ частица не облучается и находится в термодинамическом равновесии с газом; в момент $t > 0$ на частицу падает плоская монохроматическая волна интенсивностью $\mathbf{I}$ ($\mathbf{I} \parallel Oz$, $Oz-$ направлено горизонтально). Энергия электромагнитного излучения, поглощаясь в объеме частицы, перерабатывается в тепловую энергию. Тепло неоднородно распространяется в объеме за счет теплопроводности, и локальное распределение возникающих таким образом источников тепла может быть описано некоторой функцией (q_p), называемой объемной плотностью внутренних источников тепла. Тепло передается с неравномерно нагретой поверхности частицы в окружающую среду за счет излучения и взаимодействия с молекулами окружающего газа. Эффект разреженности, отвечающий за возникновение фотофореза, учитывается через краевые условия, допускающие возможность теплового скольжения газа вдоль неоднородно нагретой поверхности частицы. По своей физической природе фотофорез аналогичен термофорезу. Под действием фотофоретической силы аэрозольная частица приходит в движение. Наряду с фотофоретической силой на частицу действуют силы вязкого сопротивления среды. Когда величина фотофоретической силы становится равной по величине силе вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно. Скорость равномерного движения частицы называют фотофоретической скоростью.

Движение частицы удобно рассматривать в системе координат сплюснутого сфероида (τ, η, ϕ), связанной с центром масс частицы. Ось Oz направлена в сторону распространения однородного потока электромагнитного излучения вдоль оси симметрии сфероида. В этом случае объемная плотность внутренних источников тепла q_p имеет стандартный вид [17, 18, 20, 81]:

$$q_p(\mathbf{r}) = 2\pi k k_0 I B(\mathbf{r}), \tag{4.54}$$

где $k_0 = 2\pi/\tilde{\lambda}$ – волновое число, $m = n + ik$ – комплексный показатель преломления вещества частицы, $B(\mathbf{r})$ – безразмерная функция источников, определяется из решения задачи Ми [17, 18, 20, 81].

Поскольку мы связали систему отсчета с центром масс движущейся частицы, то наша задача свелась к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком со скоростью $\mathbf{U}_\infty$, определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности (вдали от частицы) равна с обратным знаком скорости фотофореза ($\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_p$).

При теоретическом описании фотофореза будем предполагать, что в этой главе справедливы все вышеописанные допущения (см. главу 1). Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса. Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими краевыми условиями.

Таким образом, имеем следующую математическую задачу.

Задача 5. Крупная неравномерно нагретая твердая сфероидальная частица занимает ограниченную область Ω_p евклидова пространства R^3. Требуется найти выражения, учитывающие влияние движения вязкой неизотермической газообразной среды, на фотофоретическую силу $\mathbf{F_p}(\tau, \eta)$ и скорость $\mathbf{U_p}(\tau, \eta)$ нагретой сфероидальной частицы, удовлетворяющие линеаризованной по скорости системе уравнений Навье-Стокса (1.17) — (1.19), системе уравнений (1.20) — (1.21), описывающей распределение поля температуры вне и внутри частицы и краевым условиям (4.55) — (4.58); (4.59) — (4.62) в сфероидальной системе координат и провести качественный анализ влияния движения среды (учета конвективного члена в уравнении теплопроводности) на силу и скорость фотофореза.

$$\lim_{\tau\to\tau_0} U_\tau\left(\tau,\eta\right)=0, \tag{4.55}$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0} U_\eta\left(\tau,\eta\right)=\lim_{\tau\to\tau_0}\left(K_{ts}\frac{\mu_g\left(\tau,\eta\right)}{\rho_g\left(\tau,\eta\right)T_g\left(\tau,\eta\right)H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\frac{\partial T_g\left(\tau,\eta\right)}{\partial\eta}\right), \tag{4.56}$$

$$\lim_{\tau\to\tau_0} T_g\left(\tau,\eta\right)=\lim_{\tau\to\tau_0} T_p\left(\tau,\eta\right), \tag{4.57}$$

$$-\lim_{\tau\to\tau_0}\left(\frac{\lambda_g\left(\tau,\eta\right)}{H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\frac{\partial T_g\left(\tau,\eta\right)}{\partial\tau}\right)=$$

$$=-\lim_{\tau\to\tau_0}\left(\frac{\lambda_p\left(\tau,\eta\right)}{H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\frac{\partial T_p\left(\tau,\eta\right)}{\partial\tau}+\sigma_0\sigma_1(T_p^4\left(\tau,\eta\right)-T_\infty^4)\right), \tag{4.58}$$

где σ_0 – интегральная степень черноты, σ_1 – постоянная Стефана-Больцмана.

В качестве краевых условий на бесконечности, т.е. вдали от сфероидальной частицы ($\tau\to\infty$) справедливы стандартные условия:

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(U_\tau\left(\tau,\eta\right)-U_\infty\frac{c\,\mathrm{ch}\,\tau}{H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\cos\eta\right)=0, \tag{4.59}$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(U_\eta\left(\tau,\eta\right)+U_\infty\frac{c\,\mathrm{sh}\,\tau}{H_\tau\left(\tau,\eta\right)}\sin\eta\right)=0, \tag{4.60}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} P_g=P_\infty\,,\ \lim_{\tau\to\infty} T_g\left(\tau,\eta\right)=T_\infty\,. \tag{4.61}$$

Конечность физических величин, характеризующих частицу при $\tau\to 0$, учтена в (4.61):

$$\lim_{\tau\to 0} T_p\left(\tau,\eta\right)<\infty\,, \tag{4.62}$$

где $\mathbf{e}_\tau$, $\mathbf{e}_\eta$– единичные векторы сфероидальной системы координат, $U_\infty=|\mathbf{U}_\infty|$.

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные ρ_∞, c_{pg}, λ_∞, μ_∞ и сохраняющиеся в процессе движения частицы T_∞, a, b, и U_∞. Поэтому малым параметром в нашей задаче будет число Рейнольдса $\varepsilon=Re_\infty=a\,U_\infty\,\rho_\infty/\mu_\infty$.

Обезразмерим температуру и скорость следующим образом: $t_g=T_g/T_\infty$, $t_p=T_p/T_\infty$, $\mathbf{V_g}=\mathbf{U_g}/U_\infty$.

При $\varepsilon \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений гидродинамики будем искать в виде:

$$\mathbf{V_g} = \mathbf{V_g}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V_g}^{(1)} + ..., \;\; P_g = P_g^{(0)} + \varepsilon P_g^{(1)} + ..., \tag{4.63}$$

а уравнения теплопереноса - исходя из краевого условия (4.61) методом сращиваемых асимптотических разложений (см. главу 3).

4.3.2 *Определение фотофоретической силы и скорости крупной нагретой твердой частицы сфероидальной формы. Анализ полученных результатов.*

При нахождении силы и скорости фотофореза ограничиваются до первой поправки малости по ε. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Решая уравнения теплопроводности методом сращиваемых асимптотических разложений (глава 3) мы получили следующие выражения:

$$t_g(\lambda, x) = t_{g0}(\lambda) + \varepsilon\, t_{g1}(\lambda, x), \;\; t_p(\lambda, x) = t_{p0}(\lambda) + \varepsilon t_{p1}(\lambda, x), \tag{4.64}$$

где

$$t_{g0}(\lambda) = \left(1 + \frac{M_0}{c} \operatorname{arcctg} \lambda\right)^{1/(1+\alpha)}, \tag{4.65}$$

$$t_{g1}(\lambda, x) = -\frac{æ\, c}{2 a t_{g0}^{\alpha}} \left(1 - d_1 \frac{\operatorname{arcctg}\lambda}{\operatorname{arcctg}\lambda_0}\right) + \frac{\cos\eta}{t_{g0}^{\alpha}} \Bigg[M_1 (\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) +$$

$$+ \frac{æ\, c}{2a} \Big(A_1 \chi_3(\lambda) + A_2 \chi_4(\lambda) + A_3 \chi_5(\lambda) \Big) \Bigg], \tag{4.66}$$

$$t_{p0}(\lambda) = \Bigg(B_0 + C_0 \operatorname{arcctg} \lambda + (1 + \omega) \Big[\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} q_0 \operatorname{arcctg} \lambda \; d\lambda -$$

$$- \operatorname{arcctg} \lambda \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} q_0 \; d\lambda \Big] \Bigg)^{1/(1+\omega)}, \tag{4.67}$$

$$t_{p1}(\lambda, x) = \frac{d_0}{t_{p0}^{\omega}} + \frac{\cos\eta}{t_{p0}^{\omega}} \Bigg\{ B_1 \lambda + C_1 \left(1 - \lambda \operatorname{arcctg} \lambda\right) -$$

$$-\lambda \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \;\; q_1(\lambda) \; d\lambda + (\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda q_1(\lambda) \; d\lambda \Bigg\}, \tag{4.68}$$

$$C_0=\frac{a\,b(1+\omega)}{3\lambda_* T_\infty}\sqrt{1+\lambda_0^2}\,I_0,\;\; I_0=\frac{1}{V}\int\limits_V q_p(\tau,\eta)\;dV,\; V=\frac{4}{3}\pi a^2 b,$$

$$C_1=\frac{b\left(1+\lambda_0^2\right)}{\lambda_* T_\infty}I_1,\;\; I_1=\frac{1}{V}\int\limits_V q_p(\tau,\eta)z\;dV,\; z=c\,\mathrm{sh}\,\tau\cos\eta,$$

$$q_0(\lambda)=-\frac{c^2}{2\lambda_* T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\lambda^2+x^2\right)q_p\;dx,\;\; q_1(\lambda)=-\frac{3c^2}{2\lambda_* T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1}\left(\lambda^2+x^2\right)q_p\;x\;dx,$$

$t_p(\lambda,x)=T_p(\lambda,x)/T_\infty$, $\int\limits_V q_p(\tau,\eta)z\;dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников.

Входящие в выражения t_{g0}, t_{g1}, t_{p0}, t_{p1} постоянные интегрирования определяются из краевых условий (4.57)-(4.58) на поверхности частицы, которые необходимо линеаризовать согласно выражениям (4.64). С учетом этого линеаризованные краевые условия принимают вид (4.32)-(4.36). Значения констант M_0 и M_1 определяются из краевых условий на поверхности частицы методами аналогичными тем, которые рассмотренны в параграфе 4.2.2.

В выражение для общей силы, входят коэффициенты A_1 и A_2, которые определяются из краевых условий на поверхности частицы для компонент $U_\tau(\tau,\eta)$ и $U_\eta(\tau,\eta)$ и равны соответственно:

$$A_1=\frac{G_2(\lambda_0)\Omega_2(\lambda_0)-G_3(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)}A_3-K_{tS}\frac{\varepsilon}{U_\infty}\frac{c\,\nu_g^{(s)}(\lambda_0)}{a^2 t_{gS}^{1+\alpha}(\lambda_0)}\frac{G_2(\lambda_0)}{\delta(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)}\times$$
$$\times\left\{C_1\frac{t_{gS}^{\alpha}}{t_{pS}^{\omega}}\frac{\lambda_0\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0-1}{\lambda_0\big(1+\lambda_0^2\big)}+\frac{c}{2a}\text{æ}\frac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}A_3\left[\Phi_3(\lambda_0)-\Phi_1(\lambda_0)\frac{G_3(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\Omega_2(\lambda_0)}{\Omega_1(\lambda_0)}\left(\Phi_2(\lambda_0)-\frac{G_2(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)}\Phi_1(\lambda_0)\right)\right]\right\}, \tag{4.69}$$

$$A_2=-\frac{\Omega_2(\lambda_0)}{\Omega_1(\lambda_0)}A_3+K_{tS}\frac{\varepsilon}{U_\infty}\frac{c\,\nu_g^{(s)}(\lambda_0)}{a^2 t_{gS}^{1+\alpha}(\lambda_0)}\frac{G_1(\lambda_0)}{\delta(\lambda_0)\Omega_1(\lambda_0)}\times$$
$$\times\left\{C_1\frac{t_{gS}^{\alpha}}{t_{pS}^{\omega}}\frac{\lambda_0\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0-1}{\lambda_0\big(1+\lambda_0^2\big)}+\frac{c}{2a}\text{æ}\frac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}A_3\left[\Phi_3(\lambda_0)-\Phi_1(\lambda_0)\frac{G_3(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\Omega_2(\lambda_0)}{\Omega_1(\lambda_0)}\left(\Phi_2(\lambda_0)-\frac{G_2(\lambda_0)}{G_1(\lambda_0)}\Phi_1(\lambda_0)\right)\right]\right\}, \tag{4.70}$$

$$\Phi_k(\lambda_0)=\chi_{k+2}^{'}(\lambda_0)\big(\lambda_0\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0-1\big)+\chi_{k+2}(\lambda_0)\big(\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0^2}-\mathrm{arcctg}\,\lambda_0\big),$$

$$k = 1, 2, 3, \;\; \Omega_1(\lambda_0) = G_1(\lambda_0)G_5(\lambda_0) - G_2(\lambda_0)G_4(\lambda_0),$$

$$\Omega_2(\lambda_0) = G_6(\lambda_0)G_1(\lambda_0) - G_3(\lambda_0)G_4(\lambda_0).$$

Здесь индексом "s"обозначены значения физических величин, взятые при средней относительной температуре поверхности частицы T_{pS}, определяемой формулой (4.51), $G_4(\lambda) = \dfrac{1}{2}\Big(G_1'(\lambda) - f(\lambda)G_1(\lambda)\Big)$, $G_5(\lambda) = \dfrac{1}{2}\Big(G_2'(\lambda) - f(\lambda)G_2(\lambda)\Big)$, $G_6(\lambda) = \dfrac{1}{2}\Big(G_3'(\lambda) - f(\lambda)G_3(\lambda)\Big)$, индекс "$'$"означает производные по λ от соответствующих функций.

При подстановке в выражение для общей силы, действующей на частицу (4.37), компонентов тензора напряжений, с учетом полученных выражений компонентов массовой скорости, и после интегрирования получаем:

$$F_z = -\frac{\pi\mu_\infty U_\infty a^2}{c}\left(1+\lambda_0^2\right)^2\Big[A_1N_1(\lambda_0) + A_2N_2(\lambda_0) + A_3N_3(\lambda_0)\Big], \qquad (4.71)$$

где коэффициенты A_1, A_2, A_3 - произвольные постоянные, вид функций $N_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$ приведен во второй главе.

Из (4.71) видим, что общая сила выражается через коэффициенты A_1 и A_2 и после их подстановки в формулу (4.71) получаем, что общая сила, будет складываться из силы вязкого сопротивления среды $\mathbf{F}_\mu$, фотофоретической силы $\mathbf{F}_{ph}$ и силы $\mathbf{F}_{pmh}$, связанной с движением среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{ph} + \mathbf{F}_{pmh}, \qquad (4.72)$$

где

$$\mathbf{F}_\mu = 6\pi a\mu_\infty f_\mu U_\infty \mathbf{n}_z, \qquad (4.73)$$

$$\mathbf{F}_{ph} = -6\pi a\mu_\infty f_{ph}\int\limits_V q_p\, zdV\,\mathbf{n}_z, \qquad (4.74)$$

$$\mathbf{F}_{mh} = -6\pi a\mu_\infty f_{pmh}\mathbf{n}_z, \qquad (4.75)$$

здесь $\mathbf{n}_z$– единичный вектор в направлении оси Oz,

$$f_\mu = \frac{b}{a}\frac{G_1\Omega_2N_2 - G_1\Omega_1N_3 - N_1\big(G_2\Omega_2 - G_3\Omega_1\big)}{G_1\Omega_1}\frac{\left(1+\lambda_0^2\right)^2}{6\lambda_0}, \qquad (4.76)$$

$$f_{ph} = K_{tS}\,\frac{b}{a}\,\frac{\nu_g^{(s)}}{t_{gS}}\,\frac{G_1 N_2}{8\pi T_\infty \Omega_1}\left(1-\frac{G_2}{G_1}\frac{N_1}{N_2}\right)\frac{\lambda_0 \operatorname{arcctg}\lambda_0 - 1}{\lambda_p^{(s)}\delta}, \qquad (4.77)$$

$$f_{pmh} = K_{tS}\frac{b}{a}\frac{\nu_g^{(s)}}{t_{gS}^{1+\alpha}}\frac{\lambda_g^{(s)}}{\lambda_p^{(s)}}\frac{G_1 N_2}{\delta\,\Omega_1}\left(1-\frac{G_2}{G_1}\frac{N_1}{N_2}\right)\frac{\left(1+\lambda_0^2\right)}{12\lambda_0}\frac{æ}{a}\times$$

$$\times\left[\Phi_3-\Phi_1\frac{G_3}{G_1}-\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\left(\Phi_2-\frac{G_2}{G_1}\Phi_1\right)\right]\Bigg\}. \qquad (4.78)$$

Приравнивая полную силу $\mathbf{F}$ к нулю, получаем следующее выражение для скорости упорядоченного движения нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы $\mathbf{U}_p = -\mathbf{U}_\infty$:

$$\mathbf{U}_p = -\left(h_{ph}\int\limits_V q_p\, z dV + h_{pmh}\right)\mathbf{n}_z,\ \ h_{ph} = f_{ph}/f_\mu,\ \ h_{pmh} = f_{pmh}/f_\mu. \qquad (4.79)$$

В данной главе впервые построена теория фотофоретического движения нагретой крупной твердой частицы сфероидальной формы с учетом влияния на ее движение конвективных членов в уравнении теплопроводности в вязкой неизотермической газообразной среде.

Формулы (4.72), (4.79) позволяют оценивать силу сопротивления, которую испытывает крупная неравномерно нагретая частица при движении в вязкой неизотермической газообразной среде, а также влияние движения среды (учета конвективного члена в уравнении теплопроводности) на величину силы и скорости фотофореза, когда средняя температура ее поверхности по величине существенно отличается от температуры газообразной среды вдали от нее с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Если в вышеполученных результатах заменим λ на $i\lambda$ и c на ic, то получим результаты для частицы, имеющей форму вытянутого сфероида.

Поскольку нами получены выражения для силы сопротивления нагретой сфероидальной частицы, то мы можем рассмотреть и другие предельные случаи сопротивления нагретых несферических частиц. При $\lambda \to \infty$ сплюснутый сфероид вырождается в плоский бесконечно тонкий диск. Если главная ось a вытянутого сфероида много больше экваториального радиуса b, сфероид вырождается в длинный тонкий стержень. Если полуось a незначительно по величине отличается от полуоси b, то мы получаем слабо деформированную сферу и т.д. Таким образом, формулы (4.72), (4.79) позволяют нам оценить величину силы сопротивления нагретых несферических частиц (плоский тонкий диск, длинный тонкий стержень, слабо деформированную сферу), движущихся в вязкой неизотермической газообразной среде.

Из формул (4.72), (4.79) видим, что величины, входящие в эти формулы, зависят от средней температуры поверхности частицы, определяемой из решения системы уравнений (4.51).

Рассмотрим предельные переходы полученных формул для силы и скорости фотофореза. В случае, если $f_{pmh} = 0$, формулы переходят в обычный фотофорез неравномерно нагретой аэрозольной частицы сфероидальной формы. При $M_0 \to 0$ формулы (4.72), (4.79) переходят в выражения для силы и скорости фотофореза в случае малых относительных перепадов температуры в окрестности сфероидальной частицы, полученные в работе [77]. В пределе при $c \to 0$, $\lambda \to \infty$ так, что $r = c\,\lambda$ остается постоянным, сфероидальные координаты переходят в сферические координаты r, θ, φ. Таким образом, совершая предельный переход в наших формулах, мы получаем выражения для обычного фотофореза нагретой аэрозольной частицы сферической формы, например, [70, 134].

Кроме того, из формул видно, что величина и направление силы и скорости фотофореза крупных аэрозольных частиц в основном определяется величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников $\int\limits_V q_p\, z dV$. В тех случаях, когда дипольный момент отрицательный (когда большая часть тепловой энергии выделяется в той части частицы, которая обращена к потоку излучения), частица движется в направлении падающего излучения. Если дипольный момент положительный (большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части частицы), частица будет двигаться навстречу направлению распространения излучения. Плотность тепловых источников при увеличении интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. Отсюда следует предположить, что фотофоретическая сила и скорость с увеличением интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. При постоянной величине дипольного момента увеличение форм-фактора частицы приводит к уменьшению фотофоретической силы и скорости обратно пропорционально b^3. Фотофоретическая сила и скорость существенно зависят и от теплопроводности вещества частицы. При $\lambda_p \to \infty$ (высоко теплопроводные частицы) сила и скорость фотофореза при фиксированной величине дипольного момента стремятся к нулю.

Чтобы оценить влияние движения среды на силу и скорость фотофореза, необходимо конкретизировать природу плотности тепловых источников. Здесь мы поступим так же, как и в случае термофореза.

Обычно в качестве численных оценок рассматривают наиболее простой случай, когда частица поглощает падающее излучение как черное тело, т.е. поглощение излучения происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. В этом случае

$$q_p(\tau,\eta) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{ch}\tau\cos\eta}{c(\operatorname{ch}^2\tau-\sin^2\eta)\delta\tau}I, \dfrac{\pi}{2} \le \eta \le \pi, \tau_0-\delta\tau \le \tau \le \tau_0, \\ 0, \;\; 0 \le \eta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{4.80}$$

и тогда

$$\int\limits_V q_p\,dV = \pi I c^2 \lambda_0^2 \big(1+\frac{1}{\lambda_0^2}\big),$$

$$\int\limits_V q_p\,z\,dV = -\frac{2}{3}\pi I c^3 \lambda_0^3 \big(1+\frac{1}{\lambda_0^2}\big).$$

В диссертационном исследовании для силы и скорости фотофореза были проведены качественные оценка, методами, аналогичными для термофореза. Проведенные качественные оценки показали, что вклад движения среды составляет от 25–до 40 процентов.

Таким образом, в результате проведенного исследования решены **Задачи 4 и 5** ; получены выражения для силы и скорости термо- и фотофореза с учетом движения среды в сфероидальной системе координат и проведены качественные оценки влияния движения среды на термо- и фотофоретическую силу и скорость.

Заключение

1. Получено решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса для осесимметричного случая с учетом степенного вида зависимости коэффициента динамической вязкости и плотности вязкой неизотермической газообразной среды от температуры в сфероидальной системе координат; получены выражения для компонентов массовой скорости и давления, а также силы, действующей со стороны неизотермической газообразной среды при осесимметричном обтекании неравномерно нагретой сфероидальной частицы.

2. Доказана теорема существования решения для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами.

3. Решены краевые задачи для конвективного уравнения теплопроводности методами сращиваемых асимптотических разложений и теории возмущений с учетом зависимости коэффициента теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры в сфероидальной системе координат при неазимутально-симметричном распределении плотности тепловых источников по объему частицы при малых числах Рейнольдса и Пекле.

4. В квазистационарном приближении получены выражения, позволяющие учитывать влияние движения среды на силу и скорость термо- и фотофореза, когда средняя температура поверхности частицы существенно отличается от температуры газообразной среды вдали от нее с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры.

5. Проведен качественный анализ, который показал, что движение среды значительно влияет на силу и скорость термо- и фотофореза; вклад движения среды составляет от 20% – 40% в зависимости от отношения полуосей сфероида.

Список литературы

1. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. - М.: Наука, 1979. - 830 с.

2. Абылкаиров, У.У. Однозначная разрешимость обратной задачи магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости / У.У. Абылкаиров, С.Е. Айтжанов. // Математический журнал. - 2010. - Т. 10, № 1. - С. 13-22.

3. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИ Украины, 1939. – 718 с.

4. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир., 1990. – Т. 1. – 383 с.

5. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир., 1990. – Т. 2. – 720 с.

6. Астариата, Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астариата, Дж. Марруччи. - М.: Мир., 1978. - С. 309.

7. Бабенко, К.И. О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью / К.И. Бабенко // ДАН СССР. – 1973. – Т. 210, № 2. – С. 294-297.

8. Бабкин, А.В. Основы механики сплошных сред / А.В. Бабкин, В.В. Селиванов. - М.: МГТУ, 2006. Том. 1. - С. 375.

9. Бабий, В.И. Аэродинамическое сопротивление частицы в неизотермических условиях / В.И. Бабий, И.П. Иванова // Теплоэнергетика. - 1965. – № 9. – С. 19-23.

10. Баканов, С.П. Расчет теплового скольжения при произвольной аккомодации на границе раздела фаз / С.П. Баканов // ЖТФ. – 1977. – Т. 44. – С. 421-427.

11. Баканов, С.П. Граничные задачи кинетической теории газов и необратимая термодинамика / С.П. Баканов, Ролдугин В.И. // ПММ. – 1977. – Т. 41. – С. 651-659.

12. Баканов, С.П. Термофорез в газах при малых числах Кнудсена / С.П. Баканов // УФН. – 1992. – Т. 162. № 9. – С. 133-162.

13. Берковский, Б.М. Гидродинамическое сопротивление эллипсоидальной капли при малых числах Рейнольдса / Б.М. Берковский, М.С. Краков, И.В. Никифоров, В.К. Полевиков // МЖГ. – 1987. – № 3. – С. 4-8 .

14. Береснев, С.А. Термофорез сферической аэрозольной частицы при произвольных числах Кнудсена. Постановка задачи и метод решения / С.А. Береснев, В.Г. Черняк // ТВТ. – 1986. – Т. 24, № 2. – С. 313-321.

15. Береснев, С.А. Термофорез сферической аэрозольной частицы при произвольных числах Кнудсена. Обсуждение результатов / С.А. Береснев, В.Г. Черняк // ТВТ. – 1986. – Т. 24, № 3. – С. 549-557.

16. Береснев, С.А. Кинетическая теория фотофоретического движения аэрозольной частицы / С.А. Береснев, В.Г. Черняк, Г.А. Фомягин // Актуальные вопросы физики аэродисперсных систем: Тезисы докладов XIV Всесоюзной конференции. – Одесса, – 1986. – Т. 1. – С. 64.

17. Береснев, С.А. Расчет и анализ микрофизических оптических характеристик атмосферного аэрозоля: модель однородных сферических частиц / С.А. Береснев, Л.Б. Кочнева, П.Е. Суетин // Оптика атмосф. и океана. – 2002. – Т. 15, № 5-6. – С. 522-529.

18. Береснев, С.А. Фактор асимметрии поглощения излучения и фотофорез аэрозолей / С.А. Береснев, Л.Б. Кочнева // Оптика атмосф. и океана. – 2003. – Т. 16, № 2. – С. 134-141.

19. Береснев, С.А. О возможности фотофоретической левитации частиц в стратосфере / С.А. Береснев, Ф.Д. Ковалев, Л.Б. Кочнева, П.Е. Суетин, А.А. Черемисин // Оптика атмосф. и океана. – 2003. – Т. 16, № 1. – С. 52-57.

20. Борен, К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д. Хафмен. – М.: Мир, 1986. – 660 с.

21. Борис, А.Ю. Термофорез и взаимодействие равномерно нагретых сферических частиц в газе / А.Ю. Борис // ПММ. – 1984. – Т. 48. Вып. 2. – С. 324-327.

22. Бретшнайдер, С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / С. Бретшнайдер. – М–Л.: Химия, 1966. – 535 с.

23. Броунштейн, А.В. Гидродинамика массо- и теплообмена в дисперсных системах / А.В. Броунштейн, М.И. Фишбейн. – Л.: Химия, 1977. – 279 с.

24. Бытев, В.О. Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса / В.О. Бытев // ПМТФ. – 1972. – № 6. – С. 56-64.

25. Брюханов, О.Н. Тепломассообмен / О.Н. Брюханов, С.Н. Шевченко. – М.: Наука, 2005. – 460 с.

26. Вайнберг, Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики / Б.Р. Вайнберг. – М.: МГУ, 1982. – 292 с.

27. Вальтберг, А.Ю. Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями / А.Ю. Вальтберг, П.М. Исянов, Ю.И. Яламов. – Санкт-Петербург: Нииогаз-фильтр. 1993. – 235 с.

28. Ван-Дайк, М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967. – 310 с.

29. Варгафтик, Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б. Варгафтик. – М.: Наука, 1977. – 720 с.

30. Валуева, Е.П. Введение в механику жидкости / Е.П. Валуева, В.Г. Свиридов – М.: МЭИ, 2001. – 211 с.

31. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. - М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.

32. Галкин, В.С. Обтекание сильно нагретой сферы потоком газа при малых числах Рейнольдса / В.С. Галкин, М.И. Коган, О.Г. Фридлендер // ПММ. – 1972. – Т. 36. – С. 880-885.

33. Галкин, В.С. О силах на тела в газе, обусловленных барнеттовскими напряжениями / В.С. Галкин, О.Г. Фридлендер // ПММ. – 1974. – Т. 38, Вып. 2. – С. 271-283.

34. Галоян, В.С. Динамика капель в неоднородных вязких средах / В.С. Галоян, Ю.И. Яламов. – Ереван: Луйс, 1985. – 208 с.

35. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

36. Грандштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Грандштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматиздат, 1962. – 1100 с.

37. Григорьев, И.С. Физические величины. Справочник / И.С. Григорьев, Е.З. Мейлихова. - М.: Энергоатомоиздат, 1991. - 1232 с.

38. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

39. Иванов, Е.В. Движение оптически плотных капель жидкости в поле лазерного излучения / Е.В. Иванов, В.Я. Коровин, Ю.С. Седунов // Квантовая электроника. – 1977. – Т. 4, № 9. – С. 1873-1881.

40. Ивченко, И.Н. Тепловое скольжение неоднородного газа вдоль плоской поверхности / И.Н. Ивченко, Ю.И. Яламов // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1969. – № 6. – С. 59-66.

41. Ильюшин, А.А. Механика сплошных сред / А.А. Ильюшин. - М.: МГУ, 1971. - С. 247.

42. Кабанов, М.В. Мощное лазерное излучение в атмосферном аэрозоле / М.В. Кабанов. – Новосибирск: Наука., 1984. – 222 с.

43. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Гос. издат. физ.-мат. литер., 1981. – 703 с.

44. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.

45. Ковалев, Ф.Д. Экспериментальное исследование фотофореза в газах: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.14. - Екатеринбург: Урал. гос. ун-т., 2003. – 133 с.

46. Коган, М.Н. Динамика разреженного газа / М.Н. Коган. - М.: Наука, 1967. - С. 440.

47. Комаров, И.В. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции / И.В. Комаров, Л.И. Пономарев, С.Ю. Славянов. - М.: Наука, 1976. - 319 с..

48. Кочнева, Л.Б. Микрофизические оптические характеристики и фотофорез атмосферных аэрозолей: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.14. - Екатеринбург: Урал. гос. ун-т., 2006. – 130 с.

49. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Иностр. Лит-ры. 1958. – 474 с.

50. Корнев, Г.В. Тензорное исчисление / Г.В. Корнев. – М.: МФТИ, 2000. – 239 с.

51. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: ОНТИ, 1937. – 456 с.

52. Кузиковский, А.В. Динамика сферической частицы в мощном оптическом поле / А.В. Кузиковский // Изв. ВУЗ. Физика. - 1970. – № 5. – С. 89-94.

53. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

54. Ладыженская, О.А. Исследование уравнения Навье-Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская // УМН. - 1959. - Т. XIV. Вып. 3(87). - С. 75-97.

55. Ладыженская, О.А. Шестая проблема тысячелетия: Уравнения Навье-Стокса. Существование и гладкость / О.А. Ладыженская // УМН. - 2003. - Т. 58. Вып. 2(350). - С. 45-78.

56. Ландау, Л.Д. Механика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: ТТЛ, 1954. - 795 с.

57. Латышев, А.В. Влияние температуры молекулярного газа на значения коэффициента скольжения / А.В. Латышев, А.А. Юшканов, В.Н. Попов // ПМТФ. – 2006. – №1. – С. 58-65.

58. Латышев, А.В. Аналитическое решение граничных задач кинетической теории Монография / А.В. Латышев, А.А. Юшканов. – Изд-во МГОУ, 2004. – 286 с.

59. Ламб, Г. Гидродинамика / Г. Ламб. - М.: ОГИЗ, 1947. - С. 928.

60. Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. - СПб.: Лань, 2010. - 368 с.

61. Малай, Н.В. Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц / Н.В. Малай, Е.Р. Щукин // ИФЖ. – 1988 – Т. 54, № 4. – С. 628-634.

62. Малай, Н.В. Исследование термодиффузиофоретического и фотофоретического движения частиц в сжимаемых газообразных средах: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.02. - Одесса: Одес. гос. ун-т., 1988. – 146 с.

63. Малай, Н.В. Обтекание неравномерно нагретой капли потоком жидкости при произвольных перепадах температуры в ее окрестности / Н.В. Малай // ИФЖ. – 2000. – Т. 73, № 4. – С. 1-11.

64. Малай, Н.В. Влияние нелинейных характеристик среды и форм-фактора на движение твердых частиц и капель в жидких средах при малых числах Рейнольдса: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14. - Москва: Моск. обл. гос. ун-т., 2001. – 328 с.

65. Малай, Н.В. Решение краевой задачи медленного обтекания сферы вязким неизотермическим газом / Н.В. Малай, А.В. Глушак, А.В. Лиманская // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2016. - № 12. - С. 54-65.

66. Малай, Н.В. К вопросу о влиянии внутреннего тепловыделения на термофорез твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы / Н.В. Малай, А.А. Плесканев // ИФЖ. – 2004. – Т. 77, № 6. – С. 74-78.

67. Малай, Н.В. Решение краевой задачи для линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в случае неизотермического обтекания равномерно нагретой сферы газообразной средой / Н.В. Малай, А.В. Лиманская, Е.Р. Щукин // Дифференциальные уравнения. - 2015. - Т. 51, № 10. С. 1328-1338.

68. Малай, Н.В. О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущуюся в газообразной среде / Н.В. Малай, К.С. Рязанов, Е.Р. Щукин, А.А. Стукалов // ПМТФ. - 2011. - Т. 52, № 4. - С. 63-71.

69. Малай, Н.В. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы / Н.В. Малай, А.В. Лиманская, Е.Р. Щукин, А.А. Стукалов // ЖТФ. - 2012. - Т. 82, вып. 10. - С. 42-50.

70. Малай, Н.В. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы / Н.В. Малай, А.В. Лиманская, Е.Р. Щукин // ПМТФ. - 2016. - Т. 57, № 2(336). - С. 164-171.

71. Малай, Н.В. К вопросу о гидродинамическом сопротивлении сфероидальной частицы с однородным внутренним тепловыделением / Н.В. Малай, Е.Р. Щукин // ПМТФ. - 2001. - Т. 42, № 6. - С. 1-6.

72. Малай, Н.В. К вопросу о термофорезе твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы / Н.В. Малай, Е.Р. Щукин // Журнал технической физики. - 2003. - Т. 73, вып. 9. - С. 39-43.

73. Рязанов, К.С. Вычисление распределения поглощаемой электромагнитной энергии внутри частиц сферической формы / К.С. Рязанов, И.В. По-

пов, Н.В. Малай // Свид. о госуд. регистрации программы для ЭВМ № 2010616043 14.09.2010.

74. Малай, Н.В. Решение краевой задачи для линеаризованных по скорости уравнений Навье-Стокса в случае седиментации нагретой твердой гидрозольной частицы сферической формы / Н.В. Малай, А.В. Глушак, Е.Р. Щукин // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2018. - Т. 58, № 7. - С. 1180-1190.

75. Миронова, Н.Н. Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к решению уравнения теплопроводности в сфероидальной системе координат / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай // Вестник СНО: сборник студенческих научных работ. - Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. - Ч. I. - С. 16-21.

76. Миронова, Н.Н. К вопросу о влиянии движения среды на фотофорез твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы / Н.В. Малай, Н.Н. Миронова // Научные ведомости БелГУ серия Физика. Математика. - 2008 - №9(49) Вып. 14. - С. 272-282.

77. Миронова, Н.Н. К вопросу о влиянии движения среды на фотофорез твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай, Е.Р. Щукин // ИФЖ. - 2008. - Т. 81, № 5 - С. 948-955.

78. Миронова, Н.Н. Применение обобщенных степенных рядов при решении линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат / Н.В. Малай, Н.Н. Миронова // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 3 - 7 ноября 2008 г. - Ч. 4. - Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2008. - с. 78.

79. Миронова, Н.Н. Влияние нелинейных характеристик среды на фотофоретическое движение нагретой твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы / Н.Н. Миронова, А.А. Плесканев // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 3 - 7 ноября

2008 г. - Ч. 4. - Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2008. - с. 84.

80. Миронова, Н.Н. О некоторых особенностях решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай // Современные методы теории краевых задач. Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XX": тезисы докладов. - 2009. - С. 122-124.

81. Миронова, Н.Н. Нахождение приближенных аналитических решений линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай // Вестник АГУ. - 2009. - Выпуск 2 (49) - С. 65-74.

82. Миронова, Н.Н. Термо-, фото- и диффузиофорез твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. - 2009. - №5(60), вып. 16. - С. 101-111.

83. Миронова, Н.Н. Приближенное аналитическое решение линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сфероидальной системе координат / Н.Н. Миронова // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. - 2010. - №11(82), вып. 19. - С. 135-137.

84. Миронова, Н.Н. Особенности гравитационного движения твердой неравномерно нагретой аэрозольной частицы сфероидальной формы / Н.Н. Миронова // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. - 2011. - №11(106), вып. 23. - С. 82-90.

85. Миронова, Н.Н. О некоторых особенностях движения нагретых твердых сферических частиц в вязких неизотермических газообразных средах / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай, А.В. Глушак // Труды ФОРА. - 2010. - №15. - С. 1-16.

86. Миронова, Н.Н. Решение краевой задачи для линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в случае неизотермического обтекания нагретого сфероида газообразной средой / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай, А.В.

Глушак // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2012. - №5, том 52. - С. 946-959.

87. Миронова, Н.Н. Решение краевой задачи для уравнения Навье-Стокса при обтекании нагретого сфероида газообразной средой / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай, А.В. Глушак // Дифференциальные уравнения. - 2012. - том 48. - С. 1-5.

88. Миронова, Н.Н. Решение краевой задачи для линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в случае неизотермического обтекания нагретого сфероида газообразной средой / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай, А.В. Глушак, Е.Р. Щукин // Еругинские чтения - 2011: тез. докладов XIV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Новополоцк, 12 - 14 мая 2011 г.) - Новополоцк, 2011. - С. 152.

89. Миронова, Н.Н. Решение краевой задачи для линеаризованной системы уравнений газовой динамики / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай // Тезисы докладов XV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения - 2013). - 2013. - Ч. 2 - С. 71.

90. Миронова, Н.Н. Решение краевой задачи для конвективного уравнения теплопереноса / Н.Н. Миронова, Н.В. Малай // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 26-31 мая). - Белгород: ИПК НИУ "БелГУ". - 2013. - С. 118-119.

91. Mironova, N.N. Effect of medium on the thermo- , photo- and diffusiophoresis of spheroidal solid particle / N.N. Mironova, N.V. Malay // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics and Physics. - 2013. - №26 (169), Issue 33. - P. 90-98.

92. Мухтарбай Отелбаев. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса / Мухтарбай Отелбаев //Математический журнал. - 2013. - Т. 13. № 4(50). - С. 5-101.

93. Морс, Ф.М. Методы теоретической физики Т. I / - М.: ИЛ, 1958. - 930 с.

94. Морс, Ф.М. Методы теоретической физики. Т. II / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. - М.: ИЛ, 1960. - 886 с.

95. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. - М.: Наука, 1983. - С. 407.

96. Найфе, А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 535 с.

97. Нигматулин, Р.И. Физическая гидромеханика / Р.И. Нигматулин, А.А. Соловьев. – М.: ГЭОТАР, 2005. – 510 с.

98. Новиков, И.И. Теория подобия в термодинамике и теплопередаче / И.И. Новиков, В.М. Боришанский. – М.: Атомоиздат, 1973. – 183 с.

99. Охотин, А.С. Теплопроводность твердых тел: справочник / А.С. Охотин, Р.П. Боровикова, Т.В. Нечаева, А.С. Пушкарский. – М.: Энергоатоиздат, 1984. –320 с.

100. Овсянников, Л.В. Группой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. - М.: Наука, 1978. - 400 с.

101. Ольвер, Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Ольвер. - М: Наука, 1990. - 528 с.

102. Петров, К.С. Моделирование тепло- и массопереноса при аэрозольном нанесении микрокомпонентов на дисперсную твердую фазу: дис. кан. тех. наук: 01.04.14. - Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т., 2007. – 145 с.

103. Петкевич, В.В. Основы механики сплошных сред / В.В. Петкевич. – М.: УРСС, 2001. – 398 с.

104. Плесканев, А.А. Влияние нелинейных характеристик среды и форм–фактора на термо- и фотофорез твердых нагретых аэрозольных частиц сфероидальной формы при малых числах Рейнольдса: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.03. - Белгород: Белгород. гос. ун-т., 2006. – 125 с.

105. Победря, Б.Е. Лекции по тензорному анализу / Б.Е. Победря. – М.: МГУ, 1986. – 263 с.

106. Поддоскин, А.Б. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц / А.Б. Поддоскин, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов // ЖТФ. - 1982. - Т. 52. № 11. - С. 2253 - 2261.

107. Пухначев, В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса / В.В. Пухначев // Успехи механики. - 2006. - № 1. - С. 6-76.

108. Попов, Д.Н. Нестационарные гидро-механические процессы / Д.Н. Попов. - М.: Машиностроение, 1982. - С. 239.

109. Савков, С.А. Граничные условия скольжения бинарной газовой смеси вдоль поверхности малой кривизны / С.А. Савков, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов // Физическая кинетика и гидромеханика дисперсных систем. – М, 1986. – С. 57-80. – Деп. в ВИНИТИ, № 5321 В86.

110. Самойлова, Н.Н. Решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье-Стокса с учетом степенного вида зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры / Н.Н. Самойлова, Н.В. Малай // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. - 2018. - том 23, № 123. - С. 448-455.

111. Сафиуллин, Р.А. Обзор термодиффузиофореза несферических аэрозольных частиц / Р.А. Сафиуллин, Ю.И. Яламов // Деп. В ВИНИТИ 1994. – 22 с. – № 2174-В94.

112. Силин, В.П. Введение в кинетическую теорию газов / В.П. Силин. - М.: Наука, 1971. - С. 331.

113. Слезкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. - М.: ТТЛ, 1955. - 519 с.

114. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т. III. Ч.2. – 662 с.

115. Седов, Л.И. Механика сплошных сред Том. 1 / Л.И. Седов. - М.: Наука, 1976. - С. 535.

116. Седов, Л.И. Механика сплошных сред. Том. 2 / Л.И. Седов. - М.: Наука, 1976. - С. 573.

117. Смитлз, Дж. Металлы / Дж.Смитлз. – М.: Металлургия, 1980. – 446 с.

118. Стукалов, А.А. К вопросу о гравитационном движении равномерно нагретой частицы в газообразной среде / А.А. Стукалов, Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, К.С. Рязанов // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 1 – С. 74-80.

119. Стукалов, А.А. Особенности фотофоретического движения умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы / А.А. Стукалов, Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, А.А. Плесканев // Оптика атмосферы и океана. - 2006. – Т. 19, № 5. – С. 413-418.

120. Стукалов, А.А. Влияние движения среды на фотофорез крупных аэрозольных частиц сферической формы / А.А. Стукалов, Н.В. Малай, Е.Р. Щукин // Изв. РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2005. – № 9. - С. 48-58.

121. Стукалов, А.А. Нелинейные характеристики среды и движение нагретых частиц сферической формы в вязких неизотермических средах (при малых числах Рейнольдса): дис. канд. физ.-мат. наук: 01.04.07. - Курск: Курский гос. техн. ун-т., 2009. – 130 с.

122. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

123. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1972. – 735 с.

124. Ферцигер, Дж. Математическая теория процессов переноса в газах / Дж. Ферцигер, Г. Капер. – М.: Мир, 1976. – 554 с.

125. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. - М.: Мир, 1976. - 630 с.

126. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

127. Черняк, В.Г. Механика сплошных сред / В.Г. Черняк, П.Е. Суетин. – М.: Физматлит, 2006. – 352 с.

128. Чепмен, С. Математическая теория неоднородных газов / С. Чепмен, Т. Каулинг. – М.: Изд. иностр. лит., 1960. – 510 с.

129. Черченьяни, К. Математические методы в кинетической теории газов / К. Черченьяни. - М.: Мир, 1973. - С. 245.

130. Шейндлин, А.Е. Излучательные свойства твердых материалов: справочник / А.Е. Шейндлин. – М.: Энергия, 1974. – 471 с.

131. Шкадов, В.Я. Течения вязкой жидкости / В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов. – М.: МГУ, 1984. – 199 с.

132. Щукин, Е.Р. О движении аэрозольных частиц с неоднородным распределением тепловых источников в поле внешних градиентов температуры и концентрации / Е.Р. Щукин // ЖТФ. – 1980. – Т. 50, № 6. – С. 1332-1335.

133. Щукин, Е.Р. Влияние нелинейных характеристик газообразной среды на движение, улавливание и кинетику фазовых переходов аэрозольных частиц: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14. - Москва: Моск. пед. ун-т., 1998. – 275 с.

134. Щукин, Е.Р. Избранные вопросы физики аэрозолей /Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов, З.Л. Шулиманова. - М.: МПУ, 1982. - 297 с.

135. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: УРСС, 1998. – 424 с.

136. Яламов, Ю.И. Теория движения малых аэрозольных частиц в поле оптического излучения / Ю.И. Яламов, В.Б. Кутуков, Е.Р. Щукин // ИФЖ. – 1976. – Т. 32, № 6. – С. 996-1002.

137. Яламов, Ю.И. Термофорез цилиндрической аэрозольной частицы в режиме со скольжением / Ю.И. Яламов, Н.М. Афанасьев // ИФЖ. – 1977. – Т. 47, № 9. – С. 1998-2000.

138. Яламов, Ю.И. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны / Ю.И. Яламов, А.Б. Поддоскин, А.А. Юшканов // ДАН СССР. – 1980. – Т. 254, № 2. – С. 1047-1050.

139. Яламов, Ю.И. К теории термофореза цилиндрической аэрозольной частицы в умеренно разреженном газе / Ю.И. Яламов, З.А. Саффулин // ТВТ. – 1994. – Т. 32, № 2. – С. 271-275.

140. Яламов, Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах / Ю.И. Яламов, В.С. Галоян. - Ереван: Луйс, – 1985. – 204 с.

141. Яламов, Ю.И. Движение капли в поле оптического излучения при малых значениях чисел Кнудсена / Ю.И. Яламов, В.Б. Кутуков, Е.Р. Щукин // ДАН СССР. – 1974. – Т. 216, № 2. – С. 289-292.

142. Яламов, Ю.И. Термофорез цилиндрической аэрозольной частицы в режиме со скольжением / Ю.И. Яламов, А.М. Афанасьев // ЖТФ. – 1977. – Т. 47, № 9. – С. 1998-2000.

143. Яламов, Ю.И. О термофорезе аэрозольной частицы эллипсоидальной формы в гидродинамическом режиме / Ю.И. Яламов, В.П. Редчиц, М.Н. Гайдуков // ИФЖ. – 1980. – Т. 39, № 2. – С. 538-540.

144. Яламов, Ю.И. Термофорез умеренно крупной аэрозольной частицы, имеющей форму слабо деформированной сферы / Ю.И. Яламов, А.В. Чермошенцев, О.Ф. Чермошенцева // ТВТ. – 1997. – Т. 35, № 3. – С. 423-438.

145. Яламов, Г.Ю. Термофорез умеренно крупной аэрозольной частицы, имеющей форму слабо деформированной сферы / Г.Ю. Яламов // ТВТ. – 1997. – Т. 35, № 3. – С. 423-438.

146. Яламов, Ю.И. К вопросу о термофорезе крупных летучих однокомпонентных капель / Ю.И. Яламов, А.Л. Лебедева // ИФЖ. - 2000. - Т. 73. - № 6. - С. 1306-1312.

147. Яламов, Г.Ю. Теория термодиффузиофореза аэрозольных частиц при прямом влиянии коэффициента испарения: дис. кан. физ.-мат. наук: 01.04.14. - Москва: Моск. пед. ун-т., 2005. – 100 с.

148. Acrivos, A. Heat and mass transfer from single spheres in stokes flow / A. Acrivos, T.D. Taylor // J. phys. of fluids. – 1963. – Vol. 5. – No. 4. – P. 387-394.

149. Caffarelli, L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations / L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. - Comm. Pure and Appl. Math. - 1982. - № 35, P. 771–831.

150. Constantin, P. Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics, in Mathematics Unlimited 2001 and Beyond / P. Constantin. – Springer Verlag, Berlin, 2001, P. 353–360.

151. Dusel, P.W. Distribution of absorption centers within irradiated spheres / P.W. Dusel, M. Kerker, D.D. Cooke // J. Opt. Soc. Am. – 1979. – V. 69. № 1. – P. 55-59.

152. Ehrenhaft, F. Towards a physics of millionth of centimeters / F. Ehrenhaft // Physik. Zeitschr. – 1917. – Bd. 17. – S. 352-358.

153. Epstein, P.S. Zur Theorie des Radiometers / P.S. Epstein // Zs. F. Physik. – 1929. – Bd. 54. № 4. – S. 537-563.

154. Fefferman, Ch. Existence and Smoothness of the Navier-Stokes equation / Ch. Fefferman. - Cambridge, MA: Clay Mathematies Institute, 2000. P. 1-5. - URL: http://claymath.org /millennium /Navier-Stokes Equations.

155. Hidy, G.M. Photophoresis and the Decent of Particles into the Lower Strstosphere / G.M. Hidy, J.R Brock // J. Geophys. Res. – 1967. – V. 72. – N 2 . – P. 455-460.

156. Huan, J.Keh. Thermophoresis and photophoresis of cilyndrical particles / J.Keh. Huan, J.Tu. Hung // Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects.- 2001. - №. 176.- P. 213-223.

157. Greene, W.M. Photophoresis of irradiated spheres: absorption centers / W.M. Greene, R.E. Spjut, E. Bar-Ziv, A.F. Sarofim, J.P. Longwell // J. Opt. Soc. Amer. B. – 1985. – V. 2. – № 6. – P. 998-1004.

158. Kassoy, D.R. Compressible Low Reynolds Number Flow around a Sphere / D.R. Kassoy, T.C. Adomcon, J.R. and A.F. Messiter // J. Physics Fluids. – 1966. – Vol. 9. – № 4. – P. 671-68.

159. Leong, K.N. Thermophoresis and Diffusiophoresis of Large Aerosol Particles of Different Shapes / K.N. Leong //J. Aerosol Sci. – 1984. – Vol. 15. – No. 4. – P. 511-517.

160. Lin, S.P. On Photophoresis / S.P. Lin //J. Colloid Interface Sci. – 1975. – V. 51. – N 1. – P. 66-71.

161. Maxwell, J.C. On Stresses in Rarefied Gases Arisihg from Ihequalities of Temperature / J.C.Maxwell // Philos. Trans. Roy. Soc. – 1979. – Vol. 170. – № 1. – P. 231-256.

162. Rimmer, P.L. Heat transfer from a sphere in a stream of small Reynolds number / P.L. Rimmer // J. Fluid Mech. – 1968. – Vol. 32. – No. 1. – P. 1-7.

163. Rubinowiez, A. Radiometerkrafte und Ehrenhaftische Photophorese / A. Rubinowiez // Annalen der Physik. – 1920. – Bd. 62. – № 16. – S. 691-737.

164. Preining, O. Photophoresis / O. Preining // Aerosol Science / Ed. C.N. Davis N.Y.: Academic Press, – 1966. – P. 111-135.

165. Tong, N.T. Experiments on Photophoresis and Thetmophoresis / N.T. Tong // J. Colloid Interface Sci. – 1975. – V. 51. – N 1. – P. 143-151.

166. Morrison, F.A. Electrophoresis of a Particle of Arbitrary Shape / F.A. Morrison // J. Colloid and Interface Science. – 1970. – Vol. 31. – No. 2. – P. 210-214.

167. Oberbeck, A.J. Uber stationare flussigkeitsbewegungen mit beriicksichtigung d'er inner reibung. J Reine Angew Math, 1876, 81:62–80.

168. Payne, L.E., Pell W.H. The Stokes problem for a class of axially symmetric bodies / L.E. Payne, W.H. Pell. - J Fluid Mech, 1960, 7:529–544.

169. Sampson, R.A. On Stokes' s current function. Phil Transfer A, 1891, 182:449–518

170. Kinetic theory of Evaporation and cfydencation / J. Some // J. of Japan, 1973. - Vol. 35, - No. 6. - P. 1773-1776.

171. Zheng, F. Thermophoresis of spherical and non-spherical particles: a review of theories and experiments/ F. Zheng // Advances in Colloid and Interface Science. - 2002. - No. 97. - P. 255-278.

Приложение

Решение для функции $\chi(\lambda)$, удовлетворяющее краевым условиям на бесконечности, имеет вид

$$\chi(\lambda) = M_1(\lambda \operatorname{arcctg} \lambda - 1) + æ\frac{a}{c}(A_1\chi_3(\lambda) + A_2\chi_4(\lambda) + A_3\chi_5(\lambda)),$$

где

$$\chi_3(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_{1,k}\,\delta_{2,k}\right)\frac{1}{(n+4)\lambda^{n+3}} -$$

$$-(1-\lambda \operatorname{arcctg} \lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{1}{(n+1)\lambda^{n+1}},$$

$$\chi_4(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_{1,k}\,\delta_{2,k}\right)\left(-\frac{C_{0,2}}{2(n+2)\lambda^{n+1}} - \frac{C_{1,2}}{(n+3)\lambda^{n+2}} -\right.$$

$$\left.-\frac{C_{2,2}}{(n+4)\lambda^{n+3}}\left(\ln\lambda + \frac{1}{n+4}\right)\right) -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_{1,k}\,\delta_{5,k}\right)\frac{1}{(n+5)\lambda^{n+4}} + (1-\lambda \operatorname{arcctg} \lambda)\left[-\frac{1}{2}C_{0,1}C_{0,2}\Delta_0^{(1)}\lambda -\right.$$

$$-\left(C_{0,1}C_{1,2}\Delta_0^{(1)} + \frac{C_{0,2}}{2}(\Delta_0^{(1)}C_{1,1} + \Delta_1^{(1)}C_{0,1})\right)\ln\lambda +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{C_{0,2}}{2(n-1)\lambda^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{C_{1,2}}{n\lambda^{n}} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{C_{2,2}}{(n+1)\lambda^{n+1}}\left(\frac{1}{n+1} + \ln\lambda\right) -$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{5,k}\right)\frac{1}{(n+2)\lambda^{n+2}}\right],$$

$$\chi_5(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_{1,k}\,\delta_{2,k}\right)\left(-\frac{C_{0,3}}{3(n+1)\lambda^{n}} - \frac{C_{1,3}}{2(n+2)\lambda^{n+1}} -\right.$$

$$-\frac{C_{2,3}}{(n+3)\lambda^{n+2}}-\frac{C_{3,3}}{(n+4)\lambda^{n+3}}\left(\ln\lambda+\frac{1}{n+4}\right)\Bigg)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_{1,k}\,\delta_{3,k}\right)\frac{1}{(n+5)\lambda^{n+4}}+(1-\lambda\operatorname{arcctg}\lambda)\left[-\frac{1}{6}C_{0,1}C_{0,3}\lambda^2-\right.$$

$$-\left(\frac{C_{0,1}C_{1,3}}{2}+\frac{C_{0,3}}{3}(\Delta_0^{(1)}C_{1,1}+\Delta_1^{(1)}C_{0,1})\right)\lambda-$$

$$-\left(C_{0,1}C_{2,3}+\frac{C_{0,3}}{3}\left(\Delta_0^{(1)}C_{2,1}+\Delta_1^{(1)}C_{1,1}+\frac{\Delta_2^{(1)}}{2}C_{0,1}-\Delta_0^{(1)}C_{0,1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{C_{1,3}}{2}\left(\Delta_0^{(1)}C_{1,1}+\Delta_1^{(1)}C_{0,1}\right)\right)\ln\lambda+\frac{C_{0,3}}{3}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{1}{(n-2)\lambda^{n-2}}+$$

$$+\frac{C_{1,3}}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{1}{(n-1)\lambda^{n-1}}+C_{2,3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{1}{n\lambda^{n}}+$$

$$+C_{3,3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{1}{(n+1)\lambda^{n+1}}\left(\frac{1}{n+1}+\ln\lambda\right)-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{3,k}\right)\frac{1}{(n+2)\lambda^{n+2}}-w_1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_{1,k}\,\delta_{2,k}\right)\times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{2}\ln^2\lambda+\frac{2}{n+4}\ln\lambda-\ln\lambda\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}+\frac{1}{n+4}\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\frac{C_{2,2}}{(n+4)\lambda^{n+3}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\frac{C_{0,2}}{2(n+2)\lambda^{n+1}}+\left(1-\frac{1}{n+3}-\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\frac{C_{1,2}}{(n+3)\lambda^{n+2}}\right]+$$

$$+w_1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_{1,k}\,\delta_{4,k}\right)\frac{1}{(n+5)\lambda^{n+4}}-$$

$$-w_1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\delta_{1,k}\,\delta_{5,k}\right)\left(\frac{1}{n+5}+\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\frac{1}{(n+5)\lambda^{n+4}}+$$

$$+w_1\,(1-\lambda\operatorname{arcctg}\lambda)\left[-\frac{1}{2}C_{0,1}C_{0,2}\Delta_0^{(1)}\lambda\left(\frac{3}{2}-\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)-\right.$$

$$-\left(C_{0,1}C_{1,2}\Delta_0^{(1)}+\frac{C_{0,2}}{4}(\Delta_0^{(1)}C_{1,1}+\Delta_1^{(1)}C_{0,1})\right)\ln\lambda+$$

$$+\left(C_{0,1}C_{1,2}\Delta_0^{(1)}+\frac{C_{0,2}}{2}\left(\Delta_0^{(1)}C_{1,1}+\Delta_1^{(1)}C_{0,1}\right)\right)\frac{1}{2}\ln^2\frac{\lambda}{\lambda_0}+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{C_{0,2}}{2(n-1)\lambda^{n-1}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}-\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{C_{1,2}}{n\lambda^n}\left(1-\frac{1}{n}-\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{2,k}\right)\frac{C_{2,2}}{(n+1)\lambda^{n+1}}\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\ln^2\lambda+\frac{2}{n+1}\ln\lambda+\ln\lambda\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}+\frac{1}{n+1}\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{4,k}\right)\frac{1}{(n+2)\lambda^{n+2}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\delta_{5,k}\right)\left(\frac{1}{n+2}+\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\frac{1}{(n+2)\lambda^{n+2}}\Bigg],$$

здесь

$$\delta_{1,k}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^k}{2i+3},\quad \delta_{2,k}=\sum_{m=0}^{n-2k}\frac{\Delta_m^{(1)}}{m!}c_{n-2k-m,1}$$

$$\delta_{3,k}=\sum_{m=0}^{n-2k}\frac{\Delta_m^{(1)}}{m!}\left\{\sum_{l=0}^{n-m-2k}\frac{C_{l+4,3}}{l+1}C_{n-m-2k-l,1}\right\},$$

$$\delta_{4,k}=\sum_{m=0}^{n-2k}\frac{\Delta_m^{(1)}}{m!}\left\{\sum_{l=0}^{n-m-2k}\frac{C_{l+3,2}}{(l+1)^2}C_{n-m-2k-l,1}\right\},$$

$$\delta_{5,k}=\sum_{m=0}^{n-2k}\frac{\Delta_m^{(1)}}{m!}\left\{\sum_{l=0}^{n-m-2k}\frac{C_{l+3,2}}{l+1}C_{n-m-2k-l,1}\right\}.$$