Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Белгородский государственный национальный
исследовательский университет»

На правах рукописи

Ерыгина Нелли Сергеевна

КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ИЗ ВОДОЕМА В ГРУНТ

Специальность: 01.01.03 – математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор А.М.Мейрманов

Белгород – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В настоящей диссертации исследуется начально-краевая задача, описывающая фильтрацию жидкости из водоема в пористый грунт под действием силы тяжести.

Актуальность диссертационного исследования.

Задачи, связанные с рассмотрением физических процессов в сильно неоднородных средах, возникают в теории упругости, гидродинамике, в теории гетерогенных сред и композитных материалов, в теории фильтрации и других разделах физики и механики. Такие задачи весьма сложны, так как математическая модель, описывающая физический объект в несколько десятков (сотен) метров, в которой коэффициенты уравнений осциллируют на масштабе в несколько микрон (характерный размер пор в грунте), неудобна для практических применений. Поэтому, существенной альтернативой являются модели для сильно неоднородных сред, приводящие к более простым дифференциальным уравнениям, которые называются усредненными. Согласно [22], усредненные уравнения с большой степенью точности позволяют определить эффективные характеристики первоначальной среды. Это условие обеспечивается основным требованием, которому должны удовлетворять усредненные уравнения - близость решений соответствующих краевых задач для исходных и усредненных уравнений. Математическое описание сильно неоднородных сред основано на предположении о наличии у таких сред какой-либо упорядоченной микроструктуры (периодической, случайной однородной и др.) Если масштаб неоднородности среды имеет порядок ε, то среда описывается дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых в зависимости от характера микроструктуры среды являются периодическими, квазипериодическими, реализацией однородного случайного поля и др. Требуется определить поведение при $\varepsilon \to 0$ решений краевой задачи для дифференциальных уравнений такого рода с быстро изменяющимися коэффициентами и построить усредненное уравнение, которому удовлетворяет предельная функция. Усредненные модели будут свободны от быстро изменяющихся коэффициентов, что позволит использовать их для численных расчетов.

Степень разработанности вопроса. Интерес к изучению задачи о движении жидкости в пористой среде нашел свое отражение в многочисленных исследованиях российских и зарубежных авторов: М. Био [6], К. фон Терцаги [43], Р. Барриджа и Дж. Келлера [4], Э. Санчес-Паленсии, Т. Леви [17], А.М. Мейрманова [47]-[53], А.Л. Пятницкого, Г.А. Чечкина, А.С. Шамаева [42], П.Я. Кочина-Полубаринова [41], Дж. Бьюкенена [8], Ж. Лина, М. Бакингема [9], Т. Клопиу, Ж. Ферри, Р. Гилберта, А. Микелича [11], Л. Паоли, Г. Нгуетсенга, Ж. Санчес-Хьюберта [23].

Основой развития теории фильтрации в нашей стране стали исследования Н. Е. Жуковского [60]. Возможность применения к ряду задач фильтрации аналитической теории линейных дифференциальных уравнений была указана Н.Е. Кочиным [61], [62] и получила развитие в работах П.Я. Кочиной-Полубариновой, Б.К. Ризенкампфа [63]. Фундаментальные результаты в развитии теории движения грунтовых вод [41] получены академиком П.Я. Кочиной-Полубариновой. В ее работах изучены вопросы теории фильтрации жидкостей и газов в пористых средах.

Как рассматривалось в [22], различные задачи механики сильно неоднородных сред приводят к необходимости построения усредненных моделей для этих сред. Требуется построить модель среды, локальные свойства которой резко меняются, и поэтому удобнее рассмотреть усредненные характеристики такой среды, то есть, перейти к ее макроскопическому описанию.

В настоящей диссертации получены усредненные модели фильтрации жидкости из водоема в пористый грунт. За основу взята идея, изложенная в работах Р. Барриджа и Дж. Келлера [4], сначала описать совместное движение упругого скелета грунта и жидкости в порах с помощью классических законов механики сплошных сред. После этого, используя методы теории усреднения, получить соответствующие усредненные модели для исходных уравнений. При этом базовая модель не вызывает сомнений, поскольку в ее основу положены общепринятые законы механики сплошных сред. Поэтому, все ее подмодели (вместе с тем и усредненные уравнения) будут пригодны для практических применений.

Ранее, такой подход был использован в работах В. Ягера и А. Микелича [19]—[21] для специальной геометрии порового пространства (несвязный твердый скелет) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Поставленная задача решается в пространстве $\mathbb{R}^3$ для произвольной геометрии порового пространства, с использованием методов, предложенных в работах А.М. Мейрманова [45]–[56]. В этих работах были введены безразмерные критерии среды τ_0, μ_0, μ_1 и λ_0, характеризующие конкретный физический процесс. Так, например, медленной фильтрации жидкости в пористом упругом грунте соответствуют параметры $\tau_0 = 0$, $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 > 0$, а фильтрации жидкости в абсолютно твердом пористом грунте соответствуют параметры $\tau_0 = 0$, $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = \infty$.

Вопросы теории усреднения многомерных сильно неоднородных сред рассмотрены в работах многих авторов: В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова [37], А. Бенсусана, Ж.-Л. Лионса, Д. Папаниколау [5], Ж.-Л. Лионса [15], Э. Санчес-Паленсии [31], Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко [39], А.Л. Пятницкого, Г.А. Чечкина, А.С. Шамаева [42]. Задачи теории усреднения уравнений с частными производными с почти-периодическими быстро изменяющимися коэффициентами рассматривались в трудах В.В. Жикова, С.М. Козлова, О.А. Олейник [38]. В монографии О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяна, А.С. Шамаева [36] исследованы вопросы усреднения уравнений теории упругости с быстро изменяющимися коэффициентами в перфорированных областях с различными краевыми условиями.

В настоящей работе в качестве метода усреднения используется метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга [18], на основе которого получены усредненные модели фильтрации жидкости из водоема в грунт. Двухмасштабную сходимость можно считать усилением понятия слабой сходимости. Очень часто необходимо перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегралах, где некоторые слагаемые являются произведением сомножителей, каждый из которых сходится только слабо в пространстве $L^2(\Omega_T)$. Эта сложность преодолевается с помощью метода Нгуетсенга [18], который получил широкое применение в теории усреднения (см., например, работы В.В. Жикова [28], [29]).

Метод двухмасштабной сходимости впервые был предложен Г. Нгуетсенгом в 1989 г. В дальнейшем получил развитие в работах G. Allaire [1]–[2], Жикова В. В. [28], [29], Мейрманова А. М. [47], [56].

Цель работы. Целью диссертации является вывод специальных усредненных макроскопических математических моделей, описывающих протекание жидкости внутрь пористой твердотельной мелкодисперсной среды, на основе усреднения по малым пространственным масштабам уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости и доказательство корректности начально-краевых задач, связанных с такими моделями.

Тема диссертации находится в соответствии с п.2 паспорта специальности «Математические проблемы механики сплошной среды».

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие

Задачи диссертации:

1. Сформулировать систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию во времени малых возущений в системе, состоящей из

твердотельной упругой пористой среды и несжимаемой жидкости, которая заполняет водоем и поры окружающей его мелкодисперсной среды.

2. Установить существование обобщенного решения начально-краевой задачи для сформулированной системы уравнений с граничными условиями, соответствующими физической задаче фильтрации жидкости из водоема в пористый грунт.

3. В математической модели, сформулированной в результате решения первых двух задач выделить безразмерный малый параметр.

4. Применив метод усреднения Нгуетсенга к исходной математической модели теории фильтрации, получить системы усредненных уравнений, соответствующие физически различным ситуациям.

5. Сформулировать начально-краевую задачу для системы усредненных уравнений, описывающих процесс фильтрации жидкости из водоема в грунт.

6. Установить наличие сходящихся при $\varepsilon \to 0$ последовательностей решений системы уравнений исходной математической модели к решениям соответствующей системы усредненных уравнений.

7. Установить однозначную разрешимость усредненных уравнений, описывающих фильтрацию жидкости из водоема в пористый грунт.

При решении указанных задач получены следующие результаты, которые представляют научную новизну.

Научная новизна диссертации.

1. Линейные математические модели для описания фильтрации вязкой жидкости из водоема в мелкодисперсную пористую среду.

2. Усредненные по пространственным масштабам порядка среднего размера пор системы линейных дифференциальных уравнений теории фильтрации вязкой жидкости в пористую среду.

3. Корректность начально-краевых задач, для усредненных моделей теории фильтрации вязкой жидкости из водоема в пористую среду.

Положения, выносимые на защиту.

1. Теоремы о слабой предкомпактности семейств решений начально-краевых задач для системы линейных уравнений теории фильтрации жидкости из водоема в пористый грунт и существования обобщенного решения.

2. Корректность начально-краевых задач для системы усредненных уравнений фильтрации слабо вязкой жидкости в абсолютно твердый пористый грунт.

3. Корректность начально-краевых задач для системы усредненных

уравнений фильтрации слабо вязкой жидкости в упругую твердую пористую среду.

4. Корректность начально-краевых задач для системы усредненных уравнений фильтрации в упругий пористый грунт жидкости с ограниченной величиной вязкости.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа имеет теоретический характер. Результаты, проведенного исследования, могут найти применение при анализе решений уравнений математической физики, управляющих процессами фильтрации жидкости в пористых грунтах.

Общая методика исследования. В работе используются методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений математической физики. При усреднении эволюционных уравнений фильтрации жидкости в пористую мелкодисперсную среду используется метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационного исследования были представлены на второй Международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» (п. Терскол, 2012), пятой Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (г. Воронеж, 2012), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Белгород, 2013), шестой Международной научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (г. Воронеж, 2013), четырнадцатой Всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения» (г. Казань, 2015), Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна» (г. Воронеж, 2016).

Достоверность результатов обеспечивается корректностью математических преобразований при выводе усредненных уравнений фильтрации вязкой несжимаемой жидкости из водоема в пористый грунт.

Публикации. Основные научные результаты, вошедшие в диссертацию, отражены в работах [64] - [73], список которых приводится в конце диссертации. Публикации [69] - [71] опубликованы в рецензируемых научных изданиях. Результаты, представленные в публикациях [64], [65], [67], [69] [71], получены при непосредственном участии соискателя.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы, заключения, списка литературы из 73 наименований и изложена на 103 страницах.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** обосновывается актуальность работы, приводится краткий обзор литературы, по вопросам, связанным с темой диссертации, изложены цель работы, задачи диссертации, научная новизна, положения, выносимые на защиту, методика исследования, публикации по теме исследования, формулируются основные результаты диссертации.

В **первом разделе** первой главы приведены основные теоретические сведения, необходимые для изложения материала диссертации.

Во **втором разделе** первой главы представлена базовая система дифференциальных уравнений для описания процесса фильтрации несжимаемой вязкой жидкости из водоема в твердотельный пористый грунт и сформулирована начально-краевая задача, решения которой описывают этот процесс. В частности, поставлена начально-краевая задача, решения которой описывают процесс фильтрации в абсолютно твердую пористую среду. В сформулированной системе уравнений, после обезразмеривания физических переменных, выделяется малый безразмерный параметр. Исследуется разрешимость сформулированных начально-краевых задач и выводятся равномерные по малому параметру оценки решений. Вводится понятие об обобщенных решениях начально-краевой задачи.

Рассмотрим ограниченную область Q, которая располагается в полупространстве $\{\boldsymbol{x} : x_3 < 0\}$. Подобласть Ω области Q представляет собой объединение «порового» пространства $\Omega_f^{(\varepsilon)}$, «твердого скелета» $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ и их общей границы $\Gamma^{(\varepsilon)} = \partial\Omega_f^{(\varepsilon)} \cap \partial\Omega_s^{(\varepsilon)}$. Внешняя граница S области Q состоит из частей S^1 и $S^2 = S \setminus \overline{S^1}$. При этом часть S^1 границы S содержится в плоскости $\{\boldsymbol{x} : x_3 = 0\}$, а $S^2 = S \setminus \overline{S^1}$ – гладкая поверхность класса C^2, которая в некоторой малой полосе вблизи плоскости $\{\boldsymbol{x} : x_3 = 0\}$ задана уравнением $\Phi(x_1, x_2) = 0$.

Обозначим дополнение $Q \setminus \Omega = \Omega^0$. Поверхность $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ является общей границей областей Ω и Ω^0 в Q.

Область Ω заполнена упругим пористым скелетом. Поры в этом скелете заполнены вязкой несжимаемой жидкостью. Область Ω^0 заполненная той же самой жидкостью, что и поры, моделирует водоем.

В диссертации рассматривается модель, у которой поровое пространство $\Omega_f^{(\varepsilon)}$ имеет периодическую структуру. Благодаря этому, геометрическая структура порового пространства характеризуется одним геометрическим масштабом l – размером пор. Поэтому в базовой начально-краевой задаче имеется малый параметр ε, равный отношению размера пор l к масштабу L, характеризующему размер всей физической системы: $\varepsilon = l/L$.

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ совместное движение при $t > 0$ физической системы фильтрации описывается системой уравнений для перемещений $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t)$ малых физических объемов жидкости и твердого скелета

$$\tau_0 \varrho^{(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e}, \tag{1.6}$$

где

$$\mathbb{P} = \chi^{(\varepsilon)} \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) + (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}) - p^{(\varepsilon)} \, \mathbb{I}, \tag{1.7}$$

$\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{e}_3$ – единичный вектор в направлении силы тяжести. Это уравнение описывает баланс импульса в малых объемах в процессе эволюции. Здесь $\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w})$ – симметричная часть матрицы $\nabla \otimes \boldsymbol{w}$, $\mathbb{I}$ – единичная матрица, $p^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t)$ – давление в пространственно- временной точке $(\boldsymbol{x}, t)$;

$$\varrho^{(\varepsilon)} = \varrho_f \chi^{(\varepsilon)} + \varrho_s (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \,,$$

ϱ_f и ϱ_s – плотность жидкости и твердотельной среды, соответственно, $\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) = \chi\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)$ – характеристическая функция порового пространства $\Omega_f^{(\varepsilon)}$; α_μ – физически обезразмеренная сдвиговая вязкость жидкости и, точно также, α_λ – обезразмеренная жесткость твердотельной среды; τ_0 – характерное время процесса. Уравнение (1.6) в области $\Omega_0 \cup \Omega_f^{(\varepsilon)}$, заполненной жидкостью дополняется дифференциальным условием несжимаемости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t) = 0. \tag{1.8}$$

Уравнение (1.6) записано единым образом и для жидкой части физической системы и для ее твердотельной части так, что в области $\Omega^0 \cup \Omega_f^{(\varepsilon)}$, заполненной жидкостью, оно превращается в уравнение Стокса

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f + \varrho_f \boldsymbol{e}, \tag{1.9}$$

где

$$\mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) - p^{(\varepsilon)} \, \mathbb{I} \,, \tag{1.10}$$

описывающее, совместно с условием несжимаемости (1.8), движение вязкой несжимаемой жидкости. В области $\Omega_s^{(\varepsilon)}$, заполненной твердотельным скелетом уравнение (1.6) представляет собой уравнение Ламе линейной теории упругости.

Граничные условия для постановки начально-краевой задачи фильтрации принимаются в следующем виде.

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ при $t > 0$ выполнены условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.11}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \mathbb{P}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \tag{1.12}$$

для перемещений и нормальных напряжений, где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)$ – вектор нормали к соответствующей границе в точке $\boldsymbol{x}^0$.

На части S^1 внешней границы S задаются условия Неймана

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n}, \;\; \boldsymbol{x} \in S_0^1 = S^1 \cap \overline{\Omega^0}, \tag{1.13}$$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n}, \;\; \boldsymbol{x} \in S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}, \tag{1.14}$$

которые являются условием, ограничивающим сверху по направлению $\boldsymbol{e}_3$ перемещения границы S^1 физической системы.

Функция $p^{\,0}(\boldsymbol{x}, t)$ является заданным источником. Предполагается, что она удовлетворяет условию:

$$\int_{Q_T} \Big(|\nabla\, p^0(\boldsymbol{x}, t)|^2 + \Big|\nabla \Big(\frac{\partial p^0}{\partial t}\Big)(\boldsymbol{x}, t)\Big|^2\Big) d\boldsymbol{x}dt = \mathfrak{P}^2 < \infty,$$

где $\mathfrak{P}$ – константа, зависящая от геометрии области Q, $Q_T = Q \times [0, T]$.

На границе S^2 при $t > 0$ задается условие Дирихле

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \tag{1.15}$$

которое ограничивает жестким образом перемещения среды за пределы области Q.

Что касается начальных условий для систем уравнений (1.6), (1.9), то в работе они принимаются однородными

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \; \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in Q. \tag{1.16}$$

В связи с этим, эволюция системы полностью определяется зависимостью от времени источником $p^0(\boldsymbol{x}, t)$.

Базовая математическая модель (1.6) – (1.16) в работе обозначается как модель $\mathbf{M}_1$. Ввиду большой сложности не только конкретного аналитического и/или численного исследования этой модели, в работе ставится задача усреднения модели $\mathbf{M}_1$ на основе имеющегося малого параметра ε. С этой целью, полагается, что физически обезразмеренные параметры α_μ, α_λ являются функциями ε. При этом возникают различные физически интересные случаи. В работе предполагается, что у этих функций существуют конечные или бесконечные пределы следующего вида:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \mu_1.$$

Далее, в работе изучаются усредненные модели в случаях, когда:

1). $\tau_0 > 0$ и

$$\mu_0 = 0, \qquad 0 < \mu_1 < \infty, \qquad \lambda_0 = \infty\,,$$

что соответствует случаю, когда скелет является абсолютно твердым, а жидкость обладает относительно малой вязкостью с квадратичной зависимостью от параметра ε;

2). $\tau_0 > 0$ и

$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_1 = \infty, \qquad 0 < \lambda_0 < \infty\,,$$

что соответствует упругому скелету и жидкости с малой вязкостью, у которой зависимость от ε более медленная, чем ε^2;

3). $\tau_0 \to 0$ и

$$0 < \mu_0 < \infty, \qquad 0 < \lambda_0 < \infty\,,$$

что соответствует жидкости с конечной величиной вязкости и скелету с конечной величиной жесткости.

В последнем случае система, получаемая предельным переходом в коэффициентах модели $\mathbf{M}_1$ при $\tau_0 \to 0$, обозначается нами, как система $\mathbf{M}_2$, в которой эволюция поля перемещений $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$ подчинена уравнениям

$$\nabla\cdot\mathbb{P}_f + \varrho_f\boldsymbol{e} = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega^0, \quad t > 0, \tag{1.21}$$

$$\nabla\cdot\mathbb{P} + \varrho^{(\varepsilon)}\boldsymbol{e} = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad t > 0 \tag{1.22}$$

условию несжимаемости (1.8), краевым условиям (1.10) – (1.15) и начальным условием

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega\cup\Omega_f^{(\varepsilon)}. \tag{1.23}$$

Затем, посредством предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в коэффициентах модели $\mathbf{M}_2$, получается усредненная система уравнений для случая $0 < \mu_0 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$.

Определение 1.1. *Функции $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}, p^{(\varepsilon)}\}$ такие, что*

$$p^{(\varepsilon)} \in L_2(Q_T),\ \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\ \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t},\ \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t},\ \nabla \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)} \in \boldsymbol{L}_2(Q_T)$$

являются обобщенным решением задачи (1.6) – (1.16), если они удовлетворяют уравнению неразрывности (1.8) почти всюду в $Q_T = Q \times (0,T)$, граничному условию (1.15), начальному условию (1.16) для функции $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}$ и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \Big(-\tau_0\, \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \big(\zeta \mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) \Big) d\boldsymbol{x} dt =$$

$$= \int_{Q_T} \big(\tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) \big) d\boldsymbol{x} dt \tag{1.24}$$

для любых гладких функций $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ таких, что $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = 0$ на границе S_T^2 и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T) = 0$, $\boldsymbol{x} \in Q$.

Определение 1.2. *Функции $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}, p^{(\varepsilon)}\}$ такие, что*

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\ p^{(\varepsilon)},\ \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}),\ \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) \in L_2\big((0,T); L_2(Q)\big)$$

являются обобщенным решением задачи (1.7), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23), если они удовлетворяют уравнению неразрывности (1.8) почти всюду в $Q \times (0,T)$, граничному условию (1.15), начальному условию (1.23) и интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_Q \Big(\big(\zeta \mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) - \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big) d\boldsymbol{x} dt = 0 \tag{1.26}$$

для любых гладких функций $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ таких, что $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = 0$ на границе S_T^2.

Тождество (1.26) получается аналогично тождеству (1.24).

В тождествах (1.24) и (1.26) $\tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} = \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\varrho_f + (1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})\varrho_s$, функция $\zeta = \zeta(\boldsymbol{x})$ является характеристической функцией области Ω^0.

В следующей теореме утверждается, что задача (1.6) – (1.16) имеет единственное решение.

Теорема 1.1. *Пусть* $p^0(\boldsymbol{x},t)=p^0(t)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *и произвольного промежутка времени* $[0;T]$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1.6) – (1.16) и справедлива оценка*

$$\max_{0\leq t\leq T}\int_Q\Big(\tau_0^2\Big|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\Big|^2+\tau_0\Big|\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big|^2+\alpha_\lambda(1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})|\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)})|^2\Big)d\boldsymbol{x}+$$

$$+\int_0^T\int_Q\Big(|p^{(\varepsilon)}|^2+\alpha_\mu\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\Big|\mathbb{D}\Big(\boldsymbol{x},\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\Big|^2\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt\leqslant C_0,\quad(1.28)$$

где C_0 *– константа, не зависящая от* τ_0 *и* ε.

Существование слабого решения задачи (1.6) – (1.16) гарантируется теоремами о существовании таких решений, построенных на основе конструкции Галеркина.

Точно также, в следующей теореме утверждается, что задача (1.7), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23) имеет единственное решение.

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие:*

$$\int_{Q_T}\Big(|\nabla\,p^0(\boldsymbol{x},t)|^2+\Big|\nabla\Big(\frac{\partial p^0}{\partial t}\Big)(\boldsymbol{x},t)\Big|^2\Big)d\boldsymbol{x}dt=\mathfrak{P}^2<\infty.$$

Тогда для всех $\varepsilon>0$ *на произвольном интервале времени* $[0,T]$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1.7), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23) и для него справедлива оценка*

$$\int_0^T\int_Q\Big(|p^{(\varepsilon)}|^2+\alpha_\mu\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\Big|^2\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt+$$

$$+\alpha_\lambda\max_{0\leq t\leq T}\int_\Omega(1-\chi^{(\varepsilon)})|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)})|^2d\boldsymbol{x}\leqslant C_0(\mathfrak{P}^2+1).\qquad(1.29)$$

Во **второй главе** получены усредненные модели задачи фильтрации слабо вязкой жидкости в поровом пространстве с абсолютно твердым скелетом грунта.

В качестве усредненной, рассмотрена система, состоящая из следующих уравнений:

$$\tau_0\varrho_f\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\,p(\boldsymbol{x},t)=\varrho_f\,\boldsymbol{e},\quad\nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=0,\quad\boldsymbol{x}\in\Omega^0,\quad t>0;\qquad(2.1)$$

$$\nabla\cdot\,\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=0,\quad\boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t>0,\qquad(2.2)$$

$$\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=\int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\tau_0;t-\tau)\cdot\big(-\nabla p^{(f)}(\boldsymbol{x},\tau)+\varrho_f\boldsymbol{e}\big)d\tau, \qquad (2.3)$$

где $\mathbb{B}^{(f)}(\tau_0;t)$ – симметричная матрица.

Для системы (2.1) – (2.3) выполнены следующие условия:

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_0}} p(\boldsymbol{x},t), \qquad (2.4)$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_0}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0); \qquad (2.5)$$

$$p(\boldsymbol{x},t)=p^0(t),\quad \boldsymbol{x}\in S^1_0=S^1\cap\overline{\Omega^0}; \qquad (2.6)$$

$$\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=0,\quad \boldsymbol{x}\in S^2; \qquad (2.7)$$

$$p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=p^0(t),\quad \boldsymbol{x}\in S^1_1=S^1\cap\overline{\Omega}; \qquad (2.8)$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)=0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega^0. \qquad (2.9)$$

В (2.1) – (2.9) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ – вектор нормали к границе S^0 (или S^2) в точке $\boldsymbol{x}\in S^0$ (или S^2), $\hat{\varrho}=m\,\varrho_f+(1-m)\,\varrho_s$, $m=\int_Y\chi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и*

$$\mu_0=0,\ 0<\mu_1<\infty,\ \tau_0>0,\ \lambda_0=\infty,$$

функции $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\,p^{(\varepsilon)}\}$ *– обобщенное решение задачи (1.6) – (1.16),* $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}_s=\mathbb{E}_{\Omega^{(\varepsilon)}_s}\big(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\big)$ *– продолжение из области* $\Omega^{(\varepsilon)}_s$ *в область* Ω. *Тогда:*

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{\varepsilon>0\}$ *такая, что последовательности*

$$\{\zeta p^{(\varepsilon)}\},\quad \{\zeta\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\},\quad \{\zeta\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\},\quad \{\zeta\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\},\quad \{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\,p^{(\varepsilon)}\},$$

$$\{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\},\quad \{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\},\quad \{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\}$$

сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ *и* $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ *к функциям*

$$p\in W^{1,0}_2(\Omega^0_T),\quad \boldsymbol{w},\quad \zeta\boldsymbol{v},\quad \zeta\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t},\quad (1-\zeta)\,m\,p^{(f)}\in W^{1,0}_2(\Omega_T),$$

$$(1-\zeta)\boldsymbol{w}^{(f)},\quad (1-\zeta)\boldsymbol{v}^{(f)},\quad (1-\zeta)\frac{\partial\boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}$$

соответственно при $\varepsilon\to 0$ *и последовательность* $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}_s\}$ *сходится сильно в* $\boldsymbol{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$ *к нулю;*

2). Предельные функции $\boldsymbol{v}$, p, $\boldsymbol{v}^{(f)}$ и $p^{(f)}$ удовлетворяют усредненной системе (2.1) – (2.9);

3). Для решения $\boldsymbol{v}$, p, $\boldsymbol{v}^{(f)}$ и $p^{(f)}$ задачи (2.1) – (2.9) справедливы оценки

$$\int_{\Omega_T^0}\Big(\tau_0^2\Big|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\Big|^2+\tau_0|\boldsymbol{v}|^2+|\nabla\, p|^2\Big)d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_{\Omega_T}\Big(\tau_0^2\Big|\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}\Big|^2+|\boldsymbol{v}^{(f)}|^2+|\nabla\, p^{(f)}|^2\Big)d\boldsymbol{x}dt\leqslant C_0; \quad (2.10)$$

4). Задача (2.1) – (2.9) имеет единственное решение.

Для задачи (2.1) – (2.9) рассмотрена система уравнений

$$\nabla\cdot\, \boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=0, \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}\cdot\big(-\nabla p^{(f)}+\varrho_f\boldsymbol{e}\big) \quad (2.12)$$

для жидкой компоненты в области Ω при $t>0$, где $\mathbb{B}$ – симметричная постоянная матрица.

Для системы (2.11) – (2.12) вместе с условиями (2.6), (2.8) выполнено граничное условие

$$p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=p_0(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x}\in S^0. \quad (2.13)$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и функции $\{\boldsymbol{v}^{(f,k)}, p^{(f,k)}, p^{(k)}\}$ являются решением задачи (2.1) - (2.9) при $\tau_0=\dfrac{1}{k}$. Тогда:*

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{k>0\}$ такая, что последовательность $\{p^{(f,k)}\}$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функции $p^{(f)}$, последовательность $\{\boldsymbol{v}^{(f,k)}\}$ сходится слабо в $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ к функции $\boldsymbol{v}^{(f)}$ и последовательность $\{p^k\}$ сходится сильно в $W_2^{1,0}(\Omega_T^0)$ к функции $p_0(\boldsymbol{x},t)=p^0(t)-\varrho_f x_3$ при $k\to\infty$;

2). Предельные функции $\boldsymbol{v}^{(f)}, p^{(f)}, p_0$ являются решением задачи (2.6), (2.8), (2.11) – (2.13);

3). Задача (2.6), (2.8), (2.11) – (2.13) имеет единственное решение.

В **третьей главе** получены усредненные модели задачи фильтрации слабо вязкой жидкости в упругом скелете грунта. Под усредненной, будем понимать систему, состоящую из следующих уравнений:

$$\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla p(\boldsymbol{x},t)=\varrho_f\boldsymbol{e}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega^0, \quad t>0, \quad (3.1)$$

$$\tau_0\hat{\varrho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad t>0, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)} = \lambda_0\mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}_s) - p\,\mathbb{I}, \tag{3.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad t>0, \tag{3.4}$$

где $\mathfrak{N}_0^s$ – симметричный положительно определенный тензор.

Для системы (3.1) – (3.4) выполнены следующие условия:

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \tag{3.5}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\in S^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega_0}} p(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0); \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in S^2; \tag{3.7}$$

$$p(\boldsymbol{x},t) = p^0(t), \quad \boldsymbol{x}\in S_0^1 = S^1\cap\overline{\Omega^0}; \tag{3.8}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -p^0(t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \quad \boldsymbol{x}\in S_1^1 = S^1\cap\overline{\Omega}; \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in Q. \tag{3.10}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1,*

$$\mu_0 = 0, \quad 0<\lambda_0<\infty, \quad 0<\tau_0<\infty, \quad \mu_1=\infty,$$

функции $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ являются обобщенным решением задачи (1.6) – (1.16) и $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\boldsymbol{w}^\varepsilon)$ – продолжение из области Ω_s^ε в область Ω. Тогда:

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{\varepsilon>0\}$ такая, что последовательности $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$, $\{\dfrac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}$, $\{(1-\zeta)\dfrac{\partial^2\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\}$, $\{p^{(\varepsilon)}\}$ сходятся слабо в $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ и $L_2(Q_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}$, $(1-\zeta)\dfrac{\partial^2\boldsymbol{w}_s}{\partial t^2}$, p соответственно при $\varepsilon\to0$. Последовательность $\{\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}\}$ сходится слабо в $\boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функции $\boldsymbol{w}_s$ при $\varepsilon\to0$;

2). Предельные функции $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $p(\boldsymbol{x},t)$ удовлетворяют усредненной системе (3.1) - (3.10);

3). Задача (3.1) – (3.10) имеет единственное решение.

С задачей (3.1) – (3.10) свяжем систему уравнений

$$p(\boldsymbol{x},t) = p^0(t) - \varrho_f x_3 \equiv p_0(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x}\in\Omega^0; \tag{3.11}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{3.12}$$

дополненную уравнением неразрывности (3.4).

Для системы (3.4), (3.10) – (3.11) вместе с условиями (3.7), (3.9) рассмотрено граничное условие

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -p_0(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \quad \boldsymbol{x} \in S^0. \tag{3.13}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и функции* $p^{(n)}$, $\boldsymbol{w}_s^{(n)}$ *являются обобщенным решение задачи (3.1) - (3.10) при* $\tau_0 = \dfrac{1}{n}$. *Тогда:*

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{n > 0\}$ *такая, что последовательность* $\{p^n\}$ *сходится слабо в* $L_2(Q_T)$ *к функции* $p(\boldsymbol{x}, t)$ *и последовательность* $\{\boldsymbol{w}_s^n\}$ *сходится слабо в* $\boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ *к функции* $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t)$ *при* $n \to \infty$*;*

2). Предельные функции $p(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t)$ *являются решением задачи (3.7), (3.9), (3.11) – (3.13);*

3). Задача (3.7), (3.9), (3.11) – (3.13) имеет единственное решение.

В **четвертой главе** получена математическая модель задачи фильтрации вязкой жидкости в упругом скелете грунта. В качестве усредненной, рассмотрена система, состоящая из следующих уравнений:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in Q, \quad t > 0; \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \Big(\mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\, \mathbb{I}\Big) + \varrho_f\, \boldsymbol{e} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^0, \quad t > 0; \tag{4.2}$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{4.3}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\, \mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t - \tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)) d\tau, \tag{4.4}$$

$\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3(t)$ – тензоры 4 ранга; симметричный тензор $\mathfrak{N}_1$ является положительно определенным.

Для системы (4.1) – (4.4) выполнены следующие условия:

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \Big(\mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)\Big) - p(\boldsymbol{x}, t)\, \mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \tag{4.5}$$

$$\Big(\mu_0\,\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)-p(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}\Big)\cdot\boldsymbol{n}=-p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{x}\in S^1_0=S^1\cap\overline{\Omega^0};\tag{4.6}$$

$$\widehat{\mathbb{P}}\cdot\boldsymbol{n}=-p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{x}\in S^1_1=S^1\cap\overline{\Omega};\tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=0,\quad \boldsymbol{x}\in S^2;\tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega.\tag{4.9}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и*

$$\alpha_\mu=\mu_0,\ 0<\mu_0<\infty,\ 0<\lambda_0<\infty,$$

функции $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\,p^{\,(\varepsilon)}\}$ *являются обобщенным решением задачи (1.7), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23). Тогда:*

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{\varepsilon>0\}$ *такая, что последовательность* $\{p^{(\varepsilon)}\}$ *сходится слабо в* $L_2\big(Q_T\big)$ *к функции* $p(\boldsymbol{x},t)$, *а последовательность* $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$ *сходится слабо в* $\boldsymbol{W}^{1,0}_2\big(Q_T\big)$ *к функции* $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$ *при* $\varepsilon\to 0$*;*

2). Предельные функции $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$, $p(\boldsymbol{x},t)$ *являются решением усредненной системы (4.1) – (4.9);*

3). Задача (4.1) – (4.9) имеет единственное решение.

В **заключении** перечислены результаты проведенного в диссертации исследования.

Глава 1. Постановка задачи исследования

§1.1. Предварительные сведения

В настоящем разделе приведены некоторые сведения, необходимые для изложения материала диссертационного исследования.

Понятие слабой сходимости из [40, с.199]. Определение липшицевой области см. [36, с.9].

Разложение векторного пространства $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства

Пусть $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ – гильбертово пространство вектор-функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$. Множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов обозначим через $\dot{\boldsymbol{J}}(\Omega)$, а через $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega)$ – его замыкание в норме $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Совокупность элементов $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, ортогональных $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega)$, образует подпространство, которое обозначим через $\boldsymbol{G}(\Omega)$ так, что $\boldsymbol{L}_2(\Omega) = \boldsymbol{G}(\Omega) \oplus \overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega)$.

Тогда: $\boldsymbol{G}(\Omega)$ *состоит из* $\nabla\varphi$, *где* φ *есть однозначная в* Ω *функция, локально квадратично суммируемая и имеющая первые производные из* $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$.

Доказательство см. [30, с. 42].

Теорема (Ф.Реллих). *Если* Ω *— ограниченная область, то* $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ *вкладывается в* $L_2(\Omega)$ *компактно, т. е. множество* $\{u_\alpha\}$ *элементов* $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ *с равномерно ограниченными нормами* $\|u_\alpha\|^{(1)}_{2,\Omega}$ *компактно в* $L_2(\Omega)$. *Такое же утверждение справедливо и для пространства* $W^1_2(\Omega)$, *если граница* Ω *не слишком плоха (например, кусочно-гладкая).*

Доказательство см. [34, с. 64].

В диссертации использованы следующие хорошо известные неравенства.

Неравенство Коши с ε.

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, a^2 + \frac{1}{2\,\varepsilon}\, b^2,$$

справедливое при любом $\varepsilon > 0$ и произвольных a и b. (см. [35], с. 74)

Неравенство Гельдера.

$$\Big|\int_\Omega \prod_{k=1}^{s} u_k\,dx\Big| \leqslant \prod_{k=1}^{s}\Big(\int_\Omega |u_k|^{\lambda_k}\,dx\Big)^{1/\lambda_k}, \quad \lambda_k \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{s}\lambda_k^{-1} = 1.$$

(см. [35], с. 75)

Неравенство Корна.

Лемма 1.1. *Для всех* $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}^1_2(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2\,d\boldsymbol{x} \leqslant C\int_\Omega \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\,d\boldsymbol{x},$$

где постоянная C *зависит только от геометрии области* Ω *и не зависит от* $\boldsymbol{u}$. (см. [36, с.17]).

Замечание. *Неравенство Корна остается справедливым и для функций* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^1_2(\Omega)$ *равных нулю только на части границы* $S_0 \subset S$ *положительной меры. Более точно, оно справедливо для любого подмножества* $V \subset \boldsymbol{W}^1_2(\Omega)$, *для которого равенство* $\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0$ *влечет равенство* $\boldsymbol{u} = 0$.

Неравенство Пуанкаре - Фридрихса.

Лемма 1.2. *Для всех* $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |u|^2\,dx \leq C\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx,$$

где C *зависит только от геометрии области* Ω *и не зависит от* u *и*

$$\int_S |u(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}))|^2\,ds \to 0, \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ *- внешняя единичная нормаль к границе* S *области* Ω *в точке* $\boldsymbol{x} \in S$.

Неравенство Фридрихса для периодической структуры.

Предположение 1.1. *Область* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *есть периодическое повторение элементарной ячейки* $Y^{(\varepsilon)} = \varepsilon Y$, *где* $Y = (0,1)^3$, $1/\varepsilon$ *— целое число, так что* Ω *всегда содержит целое число элементарных ячеек* $Y^{(\varepsilon)}$. Y_s *— твердая часть* Y, *ее жидкая часть* Y_f *— открытое дополнение* Y_s *в* Y, $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ *— непрерывная по Липшицу поверхность. Поровое пространство* $\Omega_f^{(\varepsilon)}$ *— периодическое повторение элементарной* *ячейки εY_f, твердый скелет $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ — периодическое повторение элементарной ячейки εY_s, граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_f^{(\varepsilon)} \backslash \partial\Omega$ — периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$. Твердый скелет $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ является связным множеством.*

Лемма 1.3. *Пусть выполнено предположение 1.1 относительно геометрии области $\Omega_f^{(\varepsilon)}$. Тогда для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_q^l(\Omega_f^{(\varepsilon)})$ справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega_f^{(\varepsilon)}} |\varphi|^2 \, d\boldsymbol{x} \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega_f^{(\varepsilon)}} |\nabla_x \varphi|^2 \, d\boldsymbol{x}$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от ε.

Доказательство см. в [31, приложение, с.440].

Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга

Определение. *Последовательность $\{\varphi^{(\varepsilon)}\} \subset L_2(\Omega_T)$ называется двухмасштабно сходящейся к пределу $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$, если для любой гладкой 1-периодической по y функции $\sigma(\boldsymbol{x}, t, y)$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_T} \varphi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t)\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon) d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T} \int_Y \varphi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}dt.$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей устанавливаются следующей теоремой:

Теорема (Нгуетсенга).

1. Из любой ограниченной последовательности в $L_2(\Omega_T)$ можно выбрать подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$.

2. Пусть последовательности $\{\varphi^{(\varepsilon)}\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^{(\varepsilon)}\}$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega_T)$. Тогда существуют 1-периодическая по y функция $\varphi(\boldsymbol{x}, t, y)$ и подпоследовательность из $\{\varphi^{(\varepsilon)}\}$ такие, что

$$\varphi, \nabla_y\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y),$$

а

$$\{\varphi^{(\varepsilon)}\} \to \varphi, \quad \{\varepsilon\nabla_x\varphi^{(\varepsilon)}\} \to \nabla_y\varphi \quad \text{двухмасштабно.}$$

3. Пусть последовательности $\{\varphi^{(\varepsilon)}\}$ и $\{\nabla_x\varphi^{(\varepsilon)}\}$ равномерно ограничены в $L_2(\Omega_T)$. Тогда существуют функции $\varphi \in L_2(\Omega_T), \psi \in L_2(\Omega_T \times Y)$ и *подпоследовательность из* $\{\varphi^{(\varepsilon)}\}$ *такие, что* ψ *1-периодична по* y, $\nabla_y\psi \in L_2(\Omega_T \times Y)$, *а*

$$\{\varphi_\varepsilon\} \to \varphi, \quad \{\nabla_x\varphi_\varepsilon\} \to \nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},t) + \nabla_y\psi(\boldsymbol{x},t,y) \quad \textit{двухмасштабно.}$$

Следствие. Пусть $\sigma \in L_2(Y)$ и $\sigma^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})$ означает $\sigma(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$. Пусть последовательность $\{\varphi_\varepsilon\} \subset L_2(\Omega_T)$ двухмасштабно сходится к некоторому пределу $\varphi \in L_2(\Omega_T \times Y)$. Тогда последовательность $\{\sigma^{(\varepsilon)}\varphi^{(\varepsilon)}\}$ двухмасштабно сходится к $\sigma\varphi$.

Доказательство см. Nguetseng G. [18].

Лемма 1.4. *Пусть последовательность* $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ *сходится двухмасштабно в* $L_2(Q_T)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *к функции* $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, *последовательность* $\{\beta(\varepsilon)\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ *ограничена в* $L_2(Q_T)$ *и*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\beta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty.$$

Тогда

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t).$$

Доказательство см. в [52].

Граничные свойства функций, заданных на периодических множествах

Лемма 1.5. *Пусть*

$$v^\varepsilon \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega)),$$

$v^\varepsilon = 0$ *на части* $\sigma^{(\varepsilon)} = S_0 \cap S_f^{(\varepsilon)} \subset S_f^{(\varepsilon)} = \partial\Omega_f^{(\varepsilon)} \cap \partial\Omega$ *границы* $S = \partial\Omega$ *и последовательность* $\{v^\varepsilon\}$ *сходится слабо в* $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ *к функции* v. *Тогда* $v = 0$ *на части* S_0 *границы* S. *То есть*

$$\int_0^T\int_{S_0}|v(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{n},t)|\,d\sigma dt \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ *– вектор единичной нормали к границе* S *в точке* $\boldsymbol{x}$.

Доказательство. Рассмотрим $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon = h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ такую, что $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ является 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$, соленоидальной финитной в $Y_f \subset Y$, функция $h(\boldsymbol{x},t)$ сосредоточена в малой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 \in S_0$. По построению

$$v^\varepsilon\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_0.$$

Тогда, имеем

$$\int_{\Omega_T} (v^\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon \nabla v^\varepsilon)\, dxdt = 0.$$

В силу теоремы Нгуетсенга существует функция $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \in L^2(\Omega_T \times Y)$ 1-периодичная по $\boldsymbol{y}$, такая что $\nabla_y V \in L^2(\Omega_T \times Y)$, и последовательности $\{v^\varepsilon\}$, $\{\nabla_x v^\varepsilon\}$ с точностью до подпоследовательностей сходятся двухмасштабно к $v(\boldsymbol{x}, t)$ и $\nabla_x v(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_y V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$, соответственно. Таким образом, последнее равенство после предельного перехода примет вид

$$\int_{\Omega_T} \Big(v^\varepsilon \nabla h\, \boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) + h\, \boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) \nabla v^\varepsilon \Big)\, dxdt \to$$

$$\to \int_{\Omega_T} \{ v \nabla h \langle \boldsymbol{\varphi}_0 \rangle_Y + h\, \langle (\nabla v + \nabla_y V) \boldsymbol{\varphi}_0 \rangle_Y \}\, dxdt = 0.$$

Выберем теперь в качестве пробной функции $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varphi}_0^i(\boldsymbol{y})$ так, что функция $\boldsymbol{\varphi}_0^{(i)}$ обращалась в ноль вне малого шара $Y_0 \subset Y_f$ и $\langle \boldsymbol{\varphi}_0^{(i)} \rangle_Y = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, где $\boldsymbol{e}_i$ – единичные векторы декартовой системы координат. Возможность такого построения в идейном плане повторяет похожее утверждение в [30]. Полагая

$$v_i = \langle (\nabla v + \nabla_y V) \boldsymbol{\varphi}_0^{(i)} \rangle_Y \in L_2(\Omega_T),$$

получим

$$\int_{\Omega_T} \Big(v \frac{\partial h}{\partial x_i} + v_i h \Big)\, dxdt = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

для произвольных $h \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$. Из последнего тождества заключаем, что $v_i = \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 0$ на S_0. $\square$

Лемма о продолжении

Следующую лемму приведем в удобной для нас формулировке.

Лемма 1.6. *Пусть выполнены предположения 1.1 о геометрии области Ω_s^ε и вектор-функция $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega_s^\varepsilon)$. Тогда существует функция $\boldsymbol{v}^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ такая, что ее сужение на подобласть Ω_s^ε совпадает с $\boldsymbol{u}^\varepsilon$:*

$$(1 - \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^\varepsilon(\boldsymbol{x})) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

и
$$\|\boldsymbol{v}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \le C\|\boldsymbol{u}^\varepsilon\|_{2,\Omega_s^{(\varepsilon)}}, \quad \|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}^\varepsilon)\|_{2,\Omega} \le C\|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{2,\Omega_s^{(\varepsilon)}},$$
где постоянная C зависит только от геометрии ячейки Y и не зависит от параметра ε.

См. [38], [3].

§1.2. Описание базовой модели

В качестве базовой модели, описывающей малые возмущения в упругой деформируемой среде, перфорированной системой пор и каналов, заполненных жидкостью, рассмотрена математическая модель, состоящая из классических уравнений баланса импульса и массы, и граничных условий, описывающих поведение границы «поровое пространство – твердый скелет» (см. [50], [52], [59]).

В безразмерных переменных $\boldsymbol{x} \to \dfrac{\boldsymbol{x}}{L}$, $t \to \dfrac{t}{\tau}$, где L – характерный размер рассматриваемой области, τ – характерное время физического процесса, система дифференциальных уравнений модели при $t > 0$ имеет следующий вид
$$\alpha_\tau \bar{\varrho} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \bar{\varrho}\boldsymbol{F}, \tag{1.1}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{1.2}$$
$$\mathbb{P} = \bar{\chi}\,\alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1-\bar{\chi})\alpha_\lambda \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}. \tag{1.3}$$
Здесь
$$\bar{\varrho} = \varrho_f \bar{\chi} + \varrho_s(1-\bar{\chi}),$$
$\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция «порового» пространства $\Omega_f \subset \Omega$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$ – безразмерный вектор перемещений сплошной среды, $\boldsymbol{F}$ – безразмерная внешняя сила, $p(\boldsymbol{x},t)$ – давление, $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})$ – симметричная часть матрицы $\nabla \otimes \boldsymbol{w}$, $\mathbb{I}$ – единичная матрица, безразмерные положительные параметры α_τ, α_μ, α_λ модели определяются следующими формулами (см. [59])
$$\alpha_\tau = \frac{L}{g\tau^2}, \quad \alpha_\mu = \frac{2\mu}{\tau L g\,\rho^0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L g\,\rho^0}, \tag{1.4}$$
где ϱ_f и ϱ_s – соответственно средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета грунта, отнесенные к средней плотности воды

ϱ^0, g – ускорение силы тяжести, μ – динамическая вязкость, λ – константа упругости Ламе.

Уравнение (1.1) превращается в гидродинамическое уравнение Стокса для жидкости и в уравнение Ламе линейной теории упругости для упругого скелета, соответственно, при $\boldsymbol{x} \in \Omega_f$ и $\boldsymbol{x} \in \Omega \setminus \Omega_f$. Краевые условия на границе «поровое пространство – упругий скелет» заключены в (1.3) и выражают непрерывность перемещений и нормальных напряжений при переходе через границу раздела.

Будем полагать, что область Ω имеет следующую конструкцию.

1). Пусть $Y = (0,1) \times (0,1) \times (0,1) \subset R^3$ – единичный куб.
Y_s – «твердая» часть единичного куба Y, его «жидкая» часть Y_f является открытым дополнением Y_s в Y. Граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ между «жидкой» и «твердой» компонентами есть липшицева поверхность.

2). Область $E_f^{(\varepsilon)}$ является периодическим повторением в пространстве R^3 элементарной ячейки $Y_f^{(\varepsilon)} = \varepsilon Y_f$, а область $E_s^{(\varepsilon)}$ является периодическим повторением в пространстве R^3 элементарной ячейки $Y_s^{(\varepsilon)} = \varepsilon Y_s$, где $0 < \varepsilon < 1$.

3). Область $\Omega_f^{(\varepsilon)} \subset \Omega = \Omega \cap E_f^{(\varepsilon)}$ моделирует поровое пространство. Область $\Omega_s^{(\varepsilon)} \subset \Omega = \Omega \cap E_s^{(\varepsilon)}$ моделирует твердый скелет. Граница $\Gamma^{(\varepsilon)} = \partial\Omega_s^{(\varepsilon)} \cap \partial\Omega_f^{(\varepsilon)}$ класса C^1 является периодическим повторением в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

4). Y_s и Y_f связные множества. Поровое пространство $\Omega_f^{(\varepsilon)}$ и твердый скелет $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ связные области.

В условиях этих предположений, введем

$$\bar{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) = \chi\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big),$$

$$\bar{\varrho} = \varrho^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) = \varrho_f \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) + \varrho_s(1 - \chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})),$$

$\chi(\boldsymbol{y})$ – 1-периодическая характеристическая функция области $Y_f \subset Y$, определяющая ячейку порового пространства.

В дальнейшем будем полагать, что ε – малый параметр, которым служит величина, равная отношению среднего размера пор l к размеру физической области L:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}. \tag{1.5}$$

Основным объектом исследования настоящей работы является математическая модель фильтрации жидкости из водоема в пористый грунт. С этой целью сформулируем начально-краевую задачу, которая является моделью этого явления.

Уравнения (1.1) – (1.3) решаются в ограниченной области Q с липшицевой границей, которая располагается в полупространстве $\{x_3 < 0\}$. Подобласть Ω области Q представляет собой объединение порового пространства $\Omega_f^{(\varepsilon)}$, твердого скелета $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ и их общей границы $\Gamma^{(\varepsilon)}$, которые определены выше. Внешняя граница S области Q состоит из частей S^1 и $S^2 = S \setminus \overline{S^1}$. При этом поверхность S^1 содержится в плоскости $\{x_3 = 0\}$, а $S^2 = S \setminus \overline{S^1}$ – гладкая поверхность класса C^2, которая в некоторой малой полосе вблизи плоскости $\{x_3 = 0\}$ задана уравнением $\Phi(x_1, x_2) = 0$. Обозначим дополнение $Q \setminus \Omega = \Omega^0$. Поверхность $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ является общей границей областей Ω и Ω^0 в Q.

Область Ω моделирует упругий пористый скелет. Поры полностью заполнены вязкой несжимаемой жидкостью. Область Ω^0 моделирует полое включение в области Q, заполненное той же самой жидкостью, что и поры. С физической точки зрения это полое включение представляет собой водоем.

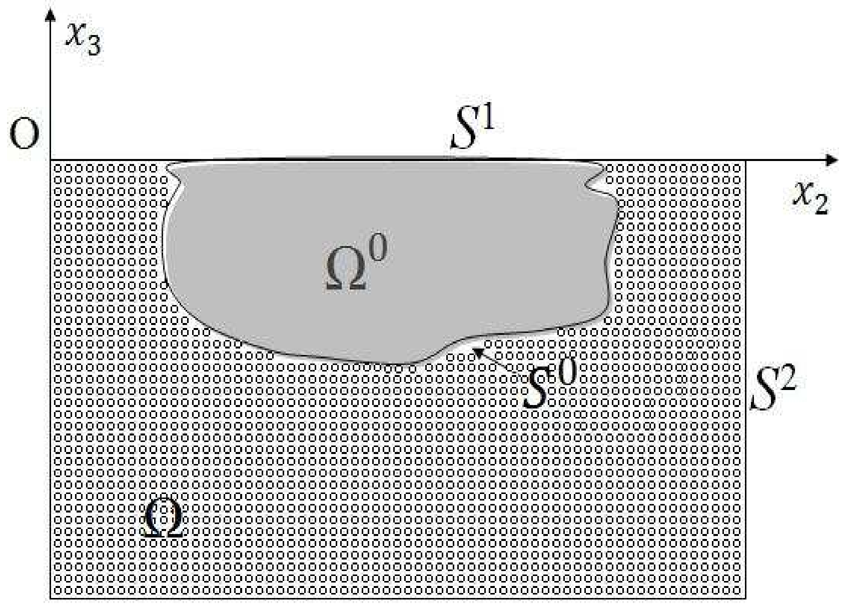

Рис. 1: Фильтрация из водоема в грунт

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ вектор перемещения среды $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t)$ и давление среды $p^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяют системе, в которой движение жидкости в области Ω^0 при $t > 0$ описывается системой уравнений Стокса

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)} = 0, \tag{1.6}$$

$$\tau_0\varrho_f\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\mathbb{P}_f+\varrho_f\boldsymbol{e}, \tag{1.7}$$

где

$$\mathbb{P}_f=\alpha_\mu\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t})-p^{(\varepsilon)}\,\mathbb{I}, \tag{1.8}$$

а совместное движение упругого скелета и жидкости в области Ω при $t>0$ описывается уравнением неразрывности (1.6) и уравнением баланса импульса

$$\tau_0\varrho^{(\varepsilon)}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\mathbb{P}+\varrho^{(\varepsilon)}\boldsymbol{e}, \tag{1.9}$$

где

$$\mathbb{P}=\chi^{(\varepsilon)}\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)+(1-\chi^{(\varepsilon)})\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)})-p^{(\varepsilon)}\,\mathbb{I}, \tag{1.10}$$

$\boldsymbol{e}=-\boldsymbol{e}_3$ – единичный вектор в направлении силы тяжести. На общей границе $S^0=\partial\Omega\cap\partial\Omega^0$ при $t>0$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}}\ \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\ \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t), \tag{1.11}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega^0}}\ \mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)=\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\ \mathbb{P}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \tag{1.12}$$

для перемещений и нормальных напряжений. Здесь $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)$ — вектор внешней нормали к границе S^0 в точке $\boldsymbol{x}^0\in S^0$. На части S^1 границы S выполнены условия Неймана

$$\mathbb{P}_f(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}=-p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n},\ \ \boldsymbol{x}\in S^1_0=S^1\cap\overline{\Omega^0}; \tag{1.13}$$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}=-p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n},\ \ \boldsymbol{x}\in S^1_1=S^1\cap\overline{\Omega}. \tag{1.14}$$

На границе S^2 при $t>0$ задано условие Дирихле

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)=0. \tag{1.15}$$

Для $\boldsymbol{x}\in Q$ выполняются однородные начальные условия

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},0)=\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=0. \tag{1.16}$$

Заданная функция $p^0(\boldsymbol{x},t)$ предполагается гладкой и подчинена условию:

$$\int_0^T\int_Q\Big(|\nabla\,p^0(\boldsymbol{x},t)|^2+|\nabla\,\Big(\frac{\partial p^0}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)|^2\Big)d\boldsymbol{x}dt=\mathfrak{P}^2<\infty, \tag{1.17}$$

где $\mathfrak{P}$ – константа, зависящая от области Q.

Начально-краевая задача (1.6) – (1.16) названа моделью $\mathbf{M}_1$. Основной целью является нахождение усредненных уравнений модели $\mathbf{M}_1$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть безразмерные параметры α_μ, α_λ являются переменными функциями, зависящими от малого параметра ε, для которых существуют конечные или бесконечные пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \mu_1.$$

Будем получать усредненные уравнения в следующих случаях:

$$\mu_0 = 0,\ \lambda_0 = \infty,\ 0 < \mu_1 < \infty; \tag{1.18}$$

$$\mu_0 = 0,\ 0 < \lambda_0 < \infty,\ \mu_1 = \infty; \tag{1.19}$$

$$0 < \mu_0 < \infty,\ 0 < \lambda_0 < \infty. \tag{1.20}$$

Для случаев (1.18), (1.19) в качестве модели усреднения используем модель $\mathbf{M}_1$.

Чтобы получить усредненную модель в случае (1.20), перейдем к пределу при $\tau_0 \to 0$ в коэффициентах модели $\mathbf{M}_1$. Тем самым получим задачу, состоящую из уравнений (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), дополненных уравнением сохранения импульса

$$\nabla\cdot\mathbb{P}_f + \varrho_f\boldsymbol{e} = 0 \tag{1.21}$$

в области Ω^0 при $t > 0$, уравнением сохранения импульса

$$\nabla\cdot\mathbb{P} + \varrho^{(\varepsilon)}\boldsymbol{e} = 0 \tag{1.22}$$

в области Ω при $t > 0$ и начальным условием

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega\cup\Omega_f^{(\varepsilon)}. \tag{1.23}$$

Начально-краевую задачу (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23) назовем моделью $\mathbf{M}_2$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в коэффициентах модели $\mathbf{M}_2$, получим усредненную модель для случая (1.20).

Определение обобщенного решения задачи (1.6) – (1.16) формулируется следующим образом:

Определение 1.1. *Функции* $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\, p^{(\varepsilon)}\}$ *такие, что*

$$p^{(\varepsilon)}\in L_2(Q_T),\ \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\ \frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t},\ \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\nabla\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t},\ \nabla\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\in\boldsymbol{L}_2(Q_T),$$

являются обобщенным решением задачи (1.6) – (1.16), если они удовлетворяют уравнению неразрывности (1.6) почти всюду в $Q_T = Q \times (0,T)$, *граничному условию (1.15), начальным условиям (1.16) для функции* $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)$ *и интегральному тождеству*

$$\int_{Q_T} \Big(-\tau_0\,\tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \big(\zeta \mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\Big) d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= \int_{Q_T} \big(\tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi} - \nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\, p^0)\big) d\boldsymbol{x}dt \tag{1.24}$$

для любых гладких функций $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ *таких, что* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = 0$ *на границе* S^2_T *и* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T) = 0$, $\boldsymbol{x} \in Q$.

Тождество (1.24) получается умножением уравнения (1.7) в области Ω^0 и уравнения (1.9) в области Ω на функцию $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ с указанными свойствами и последующим интегрированием получающихся равенств, которые соответствуют областям Ω^0 и Ω. Левые части уравнений преобразуются преобразованием по частям интеграла по t с использованием условий $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T) = 0$ и (1.16). В правых частях уравнений интегралы от дивергенций преобразуются с использованием условий Неймана (1.13) и (1.14) на основе формулы Гаусса. При этом поверхностные интегралы обращаются в нуль по поверхности S^2, а интегралы по общей поверхности S^0 у областей Ω и Ω^0 взаимно компенсируют друг друга ввиду выполнимости на ней граничного условия непрерывности нормальных напряжений (1.12).

В следующей теореме утверждается, что задача (1.6) – (1.16) при $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение.

Теорема 1.1. *Пусть*

$$p^0(\boldsymbol{x},t) = p^0(t). \tag{1.25}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *и произвольного промежутка времени* $[0;T]$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1.6) – (1.16) и справедлива оценка*

$$\max_{0\le t\le T} \int_Q \Big(\tau_0^2 \Big| \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\Big|^2 + \tau_0 \Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big|^2 + \alpha_\lambda (1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})|\mathbb{D}\big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\big)|^2\Big) d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int_0^T \int_Q \Big(|p^{(\varepsilon)}|^2 + \alpha_\mu \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\Big|\mathbb{D}\Big(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\Big|^2\Big)\, d\boldsymbol{x}\, dt \leqslant C_0, \tag{1.26}$$

где C_0 *– константа, не зависящая от* τ_0 *и* ε.

Сформулируем определение обобщенного решения задачи (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23).

Определение 1.2. *Функции* $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\, p^{\,(\varepsilon)}\}$ *такие, что*

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\ p^{\,(\varepsilon)},\ \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}),\ \big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\in L_2\big((0,T);L_2(Q)\big),$$

являются обобщенным решением задачи (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23), если они удовлетворяют уравнению неразрывности (1.6) почти всюду в $Q\times(0,T)$*, граничному условию (1.15), начальному условию (1.23) и интегральному тождеству*

$$\int_0^T\int_Q\Big(\big(\zeta\mathbb{P}_f+(1-\zeta)\mathbb{P}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})+\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)-\tilde{\varrho}^{\varepsilon}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)dxdt=0 \quad (1.27)$$

для любых гладких функций $\boldsymbol{\varphi}$ *таких, что* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)=0$ *на границе* S^2_T.

Интегральное тождество (1.27) содержит уравнения (1.21), (1.22) при $t>0$, граничное условие (1.12) на общей границе S^0 и граничные условия (1.13), (1.14).

В тождествах (1.24) и (1.27)

$$\tilde{\varrho}^{\,(\varepsilon)}=\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\varrho_f+(1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})\varrho_s.$$

В следующей теореме утверждается, что задача (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23) при всех $\varepsilon>0$ имеет единственное решение.

Теорема 1.2. *При условии (1.17), для всех* $\varepsilon>0$ *на произвольном интервале времени* $[0,T]$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23) и для него справедлива оценка*

$$\int_0^T\int_Q\Big(|p^{(\varepsilon)}|^2+\alpha_\mu\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\Big|^2\Big)\,dx\,dt+$$

$$+\alpha_\lambda\max_{0\leq t\leq T}\int_\Omega\big(1-\chi^{(\varepsilon)}\big)|\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\big)|^2dx\leqslant C_0(\mathfrak{P}^2+1). \quad (1.28)$$

§1.3. Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Решение задач (1.6) – (1.16) и (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23) обладает различной гладкостью в областях $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ и $\Omega_f^{(\varepsilon)}$. Чтобы сохранить лучшие свойства решения, продолжим поле перемещений из выбранной компоненты (жидкой или твердой) на всю область. А именно, пусть

$$\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)} = \mathbb{E}_{\Omega_s^{(\varepsilon)}}\big(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\big), \;\; \boldsymbol{v}^{(\varepsilon)} = \mathbb{E}_{\Omega_f^{(\varepsilon)}}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)$$

где

$$\mathbb{E}_{\Omega_s^{(\varepsilon)}} : \boldsymbol{W}_2^1\big(\Omega_s^{(\varepsilon)}\big) \to \boldsymbol{W}_2^1\big(\Omega\big),$$

– оператор продолжения из области $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ в область Ω и

$$\mathbb{E}_{\Omega_f^{(\varepsilon)}} : \boldsymbol{W}_2^1\big(\Omega_f^{(\varepsilon)}\big) \to \boldsymbol{W}_2^1\big(\Omega^{(\varepsilon)}\big)$$

– оператор продолжения из области $\Omega_f^{(\varepsilon)}$ в Ω. Так, что

$$\big(1-\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\big)\big(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\big) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \; t\in(0,T)$$

$$\chi^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x})\big(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{v}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\big) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \; t\in(0,T)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\Omega |\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant C_0 \int_{\Omega_s^{(\varepsilon)}} |\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x},\\
&\int_\Omega |\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\big)|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant C_0 \int_{\Omega_s^{(\varepsilon)}} |\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\big)|^2 d\boldsymbol{x},\\
&\int_\Omega |\boldsymbol{v}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^{(\varepsilon)}} |\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x},\\
&\int_\Omega |\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\big)|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant C_0 \int_{\Omega_f^{(\varepsilon)}} |\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big)|^2 d\boldsymbol{x},
\end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

где C_0 не зависит от ε и $t\in(0,T)$.

Лемма 1.7. *Для решений $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)$ начально-краевой задачи (1.6)-(1.16) справедливы следующие энергетические тождества*

$$\frac{1}{2}\int_Q \Big(\tau_0\tilde{\varrho}^{(\varepsilon)}\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\Big|^2 + \alpha_\lambda(1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})\Big|\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\big)\Big|^2\Big)d\boldsymbol{x}+$$

$$+\alpha_\mu\int_0^t\int_Q\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\Big|\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau}(\boldsymbol{x},\tau)\Big)\Big|^2 d\boldsymbol{x}d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_Q \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, \tau) d\boldsymbol{x} d\tau, \tag{1.30}$$

$$\frac{1}{2} \int_Q \Big(\tau_0 \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \Big| \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, t) \Big|^2 + \alpha_\lambda (1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)}) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)\Big) \Big|^2 \Big) d\boldsymbol{x} +$$

$$\alpha_\mu \int_0^t \int_Q \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau^2}(\boldsymbol{x}, \tau)\Big) \Big|^2 d\boldsymbol{x} d\tau =$$

$$\frac{1}{2} \int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \Big| \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \Big|^2 (\boldsymbol{x}, 0) d\boldsymbol{x} = I_0. \tag{1.31}$$

Доказательство. Для получения энергетических тождеств (1.30), (1.31) воспользуемся эволюционным уравнением в жидкой фазе (1.7) и эволюционным уравнением в грунте (1.9), в которых тензоры $\mathbb{P}_f$ и $\mathbb{P}$ определяются формулами (1.8) и (1.10) посредством тензора деформаций

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \boldsymbol{x}} + \Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)^\top \Big).$$

Уравнения (1.7) и (1.9) записываются как единое уравнение, которое получается их сложением

$$\tau_0 \tilde{\rho}^{(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \Big(\zeta \mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P} \Big) + \zeta \rho_f \boldsymbol{e} + (1-\zeta)\rho^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e}\,, \tag{1.32}$$

где $\zeta = \zeta(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция области Ω^0.

Для получения второго энергетического тождества продифференцируем уравнение (1.32) по t, умножим скалярно на пробную вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}$ и проинтегрируем обе части полученного уравнения сначала по пространственным координатам по области Q, а затем по t от 0 до текущего t. В результате, получим

$$\tau_0 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_Q \tilde{\rho}^{(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau^2} \frac{\partial^3 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau^3} d\boldsymbol{x} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_Q \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau^2} \nabla \cdot \Big(\zeta(\alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau^2}\Big) -$$

$$- \frac{\partial p_f}{\partial \tau}\mathbb{I}) + (1-\zeta)(\alpha_\mu \chi^{(\varepsilon)} \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau^2}\Big) + \alpha_\lambda (1-\chi^{(\varepsilon)}) \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau}\Big) - \frac{\partial p^{(\varepsilon)}}{\partial \tau}\mathbb{I}) \Big) d\boldsymbol{x}.$$

Преобразование левой части этого равенства дает

$$\frac{\tau_0}{2} \int\limits_Q \tilde{\rho}^{(\varepsilon)} d\boldsymbol{x} \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \Big| \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial \tau^2} \Big|^2 d\tau = \frac{\tau_0}{2} \int\limits_Q \tilde{\rho}^{(\varepsilon)} \Big(\Big| \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \Big|^2 (\boldsymbol{x}, t) - \Big| \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \Big|^2 (\boldsymbol{x}, 0) \Big) d\boldsymbol{x}\,.$$

Пространственная часть интеграла в правой части записывается в следующем виде

$$\alpha_\mu \int\limits_Q \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \nabla \cdot \Big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\Big)\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\Big) d\boldsymbol{x} - \int\limits_Q \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \nabla \cdot \Big(\zeta \frac{\partial p_f}{\partial t}\mathbb{I} +$$

$$+(1-\zeta)\frac{\partial p^{(\varepsilon)}}{\partial t}\mathbb{I}\Big) d\boldsymbol{x} + \alpha_\lambda \int\limits_Q \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \nabla \cdot \Big((1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\Big) d\boldsymbol{x}\,.$$

Далее рассматривается отдельно каждое из слагаемых. Интегралы от дивергенций преобразуются по теореме Гаусса с использованием условий Неймана (1.13) и (1.14).

Поверхностные интегралы ограничиваются на поверхности S^1 при учете граничных условий (1.12) и (1.15).

$$\alpha_\mu \int\limits_{S^1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \Big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\Big)\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\Big) \boldsymbol{n} d\sigma - \int\limits_{S^1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \boldsymbol{n} \Big(\zeta \frac{\partial p_f}{\partial t}\mathbb{I} +$$

$$+(1-\zeta)\frac{\partial p^{(\varepsilon)}}{\partial t}\mathbb{I}\Big) d\sigma + \alpha_\lambda \int\limits_{S^1_1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} (1-\chi^{(\varepsilon)})\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) \boldsymbol{n} d\sigma =$$

$$= \int\limits_{S^1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \Big(\alpha_\mu \Big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\Big)\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\Big)\boldsymbol{n} -$$

$$-\boldsymbol{n}\Big(\zeta \frac{\partial p_f}{\partial t}\mathbb{I} + (1-\zeta)\frac{\partial p^{(\varepsilon)}}{\partial t}\mathbb{I}\Big) + \alpha_\lambda (1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\boldsymbol{n}\Big) d\sigma =$$

$$= \int\limits_{S^1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \Big(\zeta\Big(\alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\Big)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\frac{\partial p_f}{\partial t}\mathbb{I}\Big) + (1-\zeta)\Big(\alpha_\mu \chi^{(\varepsilon)}\mathbb{D}\Big(\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\Big)\boldsymbol{n} -$$

$$-\boldsymbol{n}\frac{\partial p^{(\varepsilon)}}{\partial t}\mathbb{I} + \alpha_\lambda (1-\chi^{(\varepsilon)})\mathbb{D}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\boldsymbol{n}\Big)\Big) d\sigma.$$

Согласно граничному условию (1.13) на S^1_0 и граничному условию (1.14) на S^1_1 поверхностный интеграл преобразуется следующим образом

$$-\int\limits_{S^1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \Big(\zeta \frac{\partial p^0}{\partial t} + (1-\zeta)\frac{\partial p^0}{\partial t}\Big) \boldsymbol{n}\, d\sigma = -\frac{\partial p^0}{\partial t} \int\limits_{S^1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \boldsymbol{n}\, d\sigma =$$

$$= -\frac{\partial p^0}{\partial t} \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \boldsymbol{n}\, d\sigma = \frac{\partial p^0}{\partial t} \int\limits_{Q} \nabla \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

Равенство нулю последнего интеграла справедливо в силу условия несжимаемости (1.6).

Доказательство теоремы 1.1. Доказательство теоремы основывается на энергетических тождествах (1.30), (1.31).

Для нахождения решения задачи (1.6)–(1.16) используем метод Галеркина. Этот метод показывает, что при любом $t \geqslant 0$ и произвольной соленоидальной функции $\boldsymbol{\varphi} \in W_2^1(Q)$, равной нулю при $\boldsymbol{x} \in S^2$, выполняется равенство

$$\int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \int_Q \big(\zeta \mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P}\big)(\boldsymbol{x}, t) : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\big) d\boldsymbol{x} = \int_Q \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

При $t = 0$ $\zeta \mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P} = 0$ в силу начального условия. В итоге получим

$$\int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, 0) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_Q \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Согласно уравнению неразрывности (1.6), $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, 0)$ является соленоидальной функцией в Q. Возьмем в качестве пробной функции функцию $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, 0)$

$$\int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \Big| \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, 0) \Big|^2 d\boldsymbol{x} = \int_Q \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, 0) d\boldsymbol{x},$$

тогда

$$\int_Q \tau_0 \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \Big| \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}, 0) \Big|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{C_0}{\tau_0}.$$

Последнее неравенство и (1.31) доказывает оценку для производной $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}$ в (1.26).

Для оценки правой части (1.30) используется представление

$$\tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} = \varrho_f + (1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})(\varrho_s - \varrho_f), \quad \boldsymbol{e} = -\nabla\, x_3,$$

формула интегрирования по частям и уравнение неразрывности (1.6):

$$\varrho_f \int_Q \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x} = -\varrho_f \int_Q (\nabla\, x_3) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I = \int_Q \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)} \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x} d\tau = \\ = -\varrho_f \int_Q (\nabla\, x_3) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x} + (\varrho_s - \varrho_f) \int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x} = \\ = (\varrho_s - \varrho_f) \int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \boldsymbol{e} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Используя неравенства Гельдера и Коши (см. [35, с.74]), получим

$$\begin{aligned} I \leqslant \Big(\int_\Omega (\varrho_s - \varrho_f)^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \Big| \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ \leqslant \frac{(\varrho_s - \varrho_f)^2}{2\delta} |\Omega| + \frac{\delta}{2} \int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \Big| \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Пусть $\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)} = \mathbb{E}_{\Omega_s^{(\varepsilon)}} \big(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)} \big)$ — продолжение (1.29) функции $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}$ из области $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ в область Q (Здесь используются результаты о продолжении, полученные C. Conca [10]). Тогда из неравенства Пуанкаре-Фридрихса

$$\begin{aligned} \int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \Big| \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 d\boldsymbol{x} = \int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \Big| \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant \\ \leqslant C \int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \Big| \nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 d\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

и неравенства Корна (см. [36, с. 17])

$$\begin{aligned} \int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \Big| \nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 d\boldsymbol{x} \leqslant C \int_\Omega (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big) \Big|^2 d\boldsymbol{x} = \\ = C \int_Q (1 - \chi^{(\varepsilon)})(1 - \zeta) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big) \Big|^2 d\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

получаем соотношение

$$I \leqslant \frac{(\varrho_s - \varrho_f)^2}{2\delta} |\Omega| + C \frac{\delta}{2} \int_Q (1 - \chi^{(\varepsilon)})(1 - \zeta) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big) \Big|^2 d\boldsymbol{x},$$

которое вместе с (1.31) доказывает (1.26) для слагаемых содержащихся в (1.30) и (1.31).

Давление $p^{(\varepsilon)}$ оценивается как линейный функционал над пространством функций из $L_2((0,T);\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q))$. Для того, чтобы оценить давление $p^{(\varepsilon)}$, используется интегральное тождество (1.24) и оценка (1.26), которые позволяют записать неравенство

$$\left|\int_{Q_T} p^{(\varepsilon)}\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}\,dt\right| \leqslant C\left(\int_{Q_T}|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.33}$$

Далее, в качестве пробной функции выбирается функция $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi} = p^{(\varepsilon)},$$

$$\int_{Q_T}|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2 d\boldsymbol{x}\,dt \leqslant \int_{Q_T}|p^{(\varepsilon)}|^2 d\boldsymbol{x}\,dt.$$

Для этого представим ее в виде суммы

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 + \nabla\psi,$$

где

$$\Delta\psi = p^{(\varepsilon)},\ x\in Q;\quad \psi|_{S_2} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right|_{S_1} = 0; \tag{1.34}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}_0 = 0,\ x\in Q;\quad \boldsymbol{\varphi}_0 + \nabla\psi = 0,\ x\in S_2. \tag{1.35}$$

Согласно результатам, изложенным в работах О. А. Ладыженской [13], [14] каждая из задач (1.34), (1.35) имеет единственное решение, причем

$$\psi\in L_2\big((0,T);W_2^2(Q)\big),\quad \int_0^T\big(\|\psi\|_2^{(2)}\big)^2 dt \leqslant C\int_{Q_T}(p^{(\varepsilon)})^2 dx\,dt,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0\in L_2\big((0,T);W_2^1(Q)\big),\quad \int_0^T\big(\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_2^{(1)}\big)^2 dt \leqslant C\int_{Q_T}\big(\|\psi\|_2^{(2)}\big)^2 dt.$$

Тогда, неравенство (1.32) примет следующий вид

$$\left|\int_{Q_T}(p^{(\varepsilon)})^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\right| \leqslant C\left(\int_{Q_T}(p^{(\varepsilon)})^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Окончательно получаем следующее

$$\left(\int_{Q_T}(p^{(\varepsilon)})^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C. \tag{1.36}$$

Полученные результаты дают требуемую в теореме 1.1 оценку (1.26).

Доказательство теоремы 1.2. Доказательство теоремы основывается на энергетическом тождестве

$$\frac{1}{2}\int_Q \Big(\alpha_\lambda(1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})|\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\big)|^2\Big)dx+$$

$$+\alpha_\mu\int_0^t\int_Q \big(\zeta+(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big)\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial\tau}(\boldsymbol{x},\tau)\Big)|^2dxd\tau=$$

$$=\int_0^t\int_Q \tilde{\varrho}^{(\varepsilon)}\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\tau)dxd\tau. \tag{1.37}$$

Чтобы оценить правую часть (1.37), используем представление

$$\tilde{\varrho}^{(\varepsilon)}=\varrho_f+(1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})(\varrho_s-\varrho_f),\quad \boldsymbol{e}=-\nabla x_3,$$

формулу интегрирования по частям и уравнение неразрывности (1.6)

$$\varrho_f\int_Q \boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}dx=-\varrho_f\int_Q(\nabla x_3)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}dx=0.$$

Имеем

$$I=\int_{Q_T}\tilde{\varrho}^{(\varepsilon)}\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}dxd\tau=$$

$$=-\varrho_f\int_Q(\nabla x_3)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}dx+(\varrho_s-\varrho_f)\int_\Omega(1-\chi^{(\varepsilon)})\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}dx=$$

$$=(\varrho_s-\varrho_f)\int_\Omega(1-\chi^{(\varepsilon)})\boldsymbol{e}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}dx.$$

Неравенство Коши (см. [35, с.74]) дает оценку

$$I\leqslant(\varrho_s-\varrho_f)\Big(\int_\Omega dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega(1-\chi^{(\varepsilon)})\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\frac{(\varrho_s-\varrho_f)^2}{2\delta}|\Omega|+\frac{\delta}{2}\int_\Omega(1-\chi^{(\varepsilon)})\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big|^2dx.$$

Пусть $\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}=\mathbb{E}_{\Omega_s^{(\varepsilon)}}\big(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\big)$ — продолжение из области $\Omega_s^{(\varepsilon)}$ в область Q. Тогда из неравенства Пуанкаре - Фридрихса

$$\int_\Omega(1-\chi^{(\varepsilon)})\Big|\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big|^2dx=$$

$$= \int_\Omega (1-\chi^{(\varepsilon)}) \Big| \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 dx \leqslant C \int_\Omega (1-\chi^{(\varepsilon)}) \Big| \nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 dx$$

и неравенства Корна (см. [36, с. 17])

$$\int_\Omega (1-\chi^{(\varepsilon)}) \Big| \nabla \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t} \Big|^2 dx \leqslant C \int_\Omega (1-\chi^{(\varepsilon)}) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) \Big|^2 dx =$$

$$= C \int_Q (1-\chi^{(\varepsilon)})(1-\zeta) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) \Big|^2 dx,$$

получается соотношение

$$I \leqslant \frac{(\varrho_s - \varrho_f)^2}{2\delta} |\Omega| + C\,\frac{\delta}{2} \int_Q (1-\chi^{(\varepsilon)})(1-\zeta) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) \Big|^2 dx.$$

Выбор $\delta = \dfrac{\alpha_\mu}{C}$ дает следующую оценку:

$$\int_0^T \int_Q \Big(\alpha_\mu \big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\big) \Big| \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) \Big|^2 \Big)\, dx\, dt +$$

$$+ \alpha_\lambda \max_{0 \le t \le T} \int_\Omega (1-\chi^{(\varepsilon)}) |\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)})|^2 dx \leqslant C_0.$$

Наконец, заметим, что доказательство справедливости оценки для $p^{(\varepsilon)}$ полностью аналогично доказательству соответствующей оценки (1.36) в теореме 1.1.

Полученные результаты дают требуемую в теореме 1.2 оценку (1.28). С помощью этой оценки существование и единственность обобщенного решения задачи (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23) доказывается стандартным методом Галеркина (см., например, [55]).

§1.4. Выводы

В настоящей главе рассмотрена математическая модель фильтрации жидкости из водоема в пористый грунт, для которой сформулирована начально-краевая задача (1.6) – (1.16), являющаяся моделью этого явления. Задача (1.6) – (1.11) содержит гидродинамические уравнения Стокса для жидкости и уравнения Ламе линейной теории упругости для упругого скелета. Поставленная задача завершается условиями непрерывности перемещений и нормальных напряжений, однородными начальными условиями на перемещение и скорость, условиями Неймана и условием Дирихле. Как частный случай задачи (1.6) – (1.16), рассмотрена также, математическая модель фильтрации жидкости из водоема в грунт, не учитывающая перемещение сплошной среды (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23). Ставится цель – построение предельных макроскопических моделей, зависящих от асимптотического поведения коэффициентов модели, отвечающих за свойства сплошной среды и доказательство их корректности. Вводится предположение относительно периодичности порового пространства Ω_f области Ω. Благодаря чему, в уравнениях модели появляется малый параметр $0 < \varepsilon < 1$. В качестве малого параметра выбирается отношение среднего размера пор к характерному размеру рассматриваемой области. Здесь же формулируется определение обобщенных решений сформулированных начально-краевых задач. Выводятся равномерные по параметру ε оценки решений. Исследуется вопрос существования и единственности начально-краевых задач (1.6) – (1.16) и (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23).

Глава 2.

Математические модели фильтрации слабо вязкой жидкости в абсолютно твердом скелете.

В настоящей главе выводятся усредненные системы линейных дифференциальных уравнений для случая фильтрации слабо вязкой жидкости в поровом пространстве с абсолютно твердым скелетом грунта [71].

§2.1. Основные результаты

В качестве усредненной, будем понимать систему, полученную в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в уравнениях модели $\mathbf{M}_1$ при фиксированном $\tau_0 > 0$. Эта система определяется следующими уравнениями:

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \varrho_f \, \boldsymbol{e}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{2.1}$$

для скорости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и давления $p(\boldsymbol{x}, t)$ в области Ω^0 при $t > 0$ и

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x}, t) = 0, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x}, t) = \int_0^t \mathbb{B}^{(f)}(\tau_0; t - \tau) \cdot \big(- \nabla p^{(f)}(\boldsymbol{x}, \tau) + \varrho_f \boldsymbol{e} \big) d\tau \tag{2.3}$$

для скорости $\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x}, t)$ и давления $p^{(f)}(\boldsymbol{x}, t)$ в области Ω при $t > 0$.

Для системы (2.1) – (2.3) выполнены условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} p^{(f)}(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} p(\boldsymbol{x}, t), \tag{2.4}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \tag{2.5}$$

на общей границе S^0, граничное условие

$$p(\boldsymbol{x}, t) = p^0(t) \tag{2.6}$$

на части $S_0^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}_0$ внешней границы S, граничное условие

$$\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{2.7}$$

на части S^2 внешней границы S, граничное условие

$$p^{(f)}(\boldsymbol{x},t) = p^0(t) \tag{2.8}$$

на части $S^1_1 = S^1 \cap \overline{\Omega}$ внешней границы S и однородное начальное условие

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = 0, \;\; \boldsymbol{x} \in \Omega^0. \tag{2.9}$$

В (2.1) – (2.9) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ – вектор нормали к границе S^0 (или S^2) в точке $\boldsymbol{x} \in S^0$ (или S^2),

$$\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s, \quad m = \int_Y \chi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},$$

симметричная матрица $\mathbb{B}^{(f)}(\tau_0;t)$ задана формулой (2.28).

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и*

$$\mu_0 = 0, \; 0 < \mu_1 < \infty, \, \tau_0 > 0, \; \lambda_0 = \infty,$$

функции $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t),\, p^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\}$ *– обобщенное решение задачи (1.6) – (1.16),* $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}_s = \mathbb{E}_{\Omega^{(\varepsilon)}_s}\big(\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\big)$ *– продолжение (1.29) из области* $\Omega^{(\varepsilon)}_s$ *в область* Ω. *Тогда:*

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{\varepsilon > 0\}$ *такая, что последовательности*

$$\{\zeta p^{(\varepsilon)}\}, \quad \{\zeta \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}, \quad \{\zeta \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}, \quad \{\zeta \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\}, \quad \{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\, p^{(\varepsilon)}\},$$

$$\{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}, \quad \{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}, \quad \{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\, \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\}$$

сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ *и* $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ *к функциям*

$$p \in W^{1,0}_2(\Omega^0_T), \quad \boldsymbol{w}, \quad \zeta \boldsymbol{v}, \quad \zeta \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}, \quad (1-\zeta)\, m\, p^{(f)} \in W^{1,0}_2(\Omega_T),$$

$$(1-\zeta)\boldsymbol{w}^{(f)}, \quad (1-\zeta)\boldsymbol{v}^{(f)}, \quad (1-\zeta)\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}$$

соответственно при $\varepsilon \to 0$ *и последовательность* $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}_s\}$ *сходится сильно в* $\boldsymbol{W}^{1,0}_2(\Omega_T)$ *к нулю;*

2). Предельные функции $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $p(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)$, $p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)$ *удовлетворяют усредненной системе (2.1) – (2.9);*

3). Для решения $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $p(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)$ и $p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)$ задачи (2.1) – (2.9) справедливы оценки

$$\int_{\Omega_T^0}\big(\tau_0^2\Big|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\Big|^2+\tau_0|\boldsymbol{v}|^2+|\nabla\, p|^2\big)d\boldsymbol{x}dt+$$
$$+\int_{\Omega_T}\big(\tau_0^2\Big|\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}\Big|^2+|\boldsymbol{v}^{(f)}|^2+|\nabla\, p^{(f)}|^2\big)d\boldsymbol{x}dt\leqslant C_0; \quad (2.10)$$

4). Задача (2.1) – (2.9) имеет единственное решение.

С задачей (2.1) – (2.9) свяжем систему уравнений

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^{(f)}=0, \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{v}^{(f)}=\frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}\cdot\big(-\nabla p^{(f)}+\varrho_f\boldsymbol{e}\big) \quad (2.12)$$

для жидкой компоненты в области Ω при $t>0$, где $\mathbb{B}$ – симметричная постоянная матрица, задана формулой (2.37).

Для системы (2.11) – (2.12) вместе с условиями (2.6), (2.8) рассмотрим граничное условие

$$p^{(f)}=p_0(\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{x}\in S^0. \quad (2.13)$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и функции $\{\boldsymbol{v}^{(f,k)},\, p^{(f,k)},\, p^{(k)}\}$ являются решением задачи (2.1) – (2.9) при $\tau_0=\dfrac{1}{k}$. Тогда:*

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{k>0\}$ такая, что последовательность $\{p^{(f,k)}\}$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функции $p^{(f)}$, последовательность $\{\boldsymbol{v}^{(f,k)}\}$ сходится слабо в $L_2(\Omega_T)$ к функции $\boldsymbol{v}^{(f)}$ и последовательность $\{p^k\}$ сходится сильно в $W_2^{1,0}(\Omega_T^0)$ к функции $p_0(\boldsymbol{x},t)=p^0(t)-\varrho_f x_3$ при $k\to\infty$;

2). Предельные функции $\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t), p^{(f)}(\boldsymbol{x},t), p_0(\boldsymbol{x},t)$ являются решением задачи (2.6), (2.8), (2.11) – (2.13);

3). Задача (2.6), (2.8), (2.11) – (2.13) имеет единственное решение.

§2.2. Доказательство теоремы 2.1

Оценки (1.26) обеспечивают ограниченность последовательностей $\{\zeta p^{(\varepsilon)}\}$, $\{\zeta\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$, $\{\zeta\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}/\partial t\}$, $\{\zeta\partial^2\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}/\partial t^2\}$, $\{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\,p^{(\varepsilon)}\}$,

$\{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$, $\{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\,\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}/\partial t\}$, $\{(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\,\partial^2\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}/\partial t^2\}$ в $L_2(Q_T)$ и $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$. Следовательно, существует подпоследовательность от малого параметра $\{\varepsilon_k>0\}$ такая, что

$$\zeta p^{\varepsilon_k}\rightharpoonup p,\ \ \zeta\boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}\rightharpoonup\boldsymbol{w},\ \ \zeta\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}}{\partial t}\rightharpoonup\zeta\boldsymbol{v},\ \ \zeta\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}}{\partial t^2}\rightharpoonup\zeta\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t},$$
$$(1-\zeta)\chi^{\varepsilon_k}\,p^{(\varepsilon)}\rightharpoonup(1-\zeta)\,m\,p^{(f)},\ \ (1-\zeta)\chi^{\varepsilon_k}\,\boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}\rightharpoonup(1-\zeta)\boldsymbol{w}^{(f)},$$
$$(1-\zeta)\chi^{\varepsilon_k}\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}}{\partial t}\rightharpoonup(1-\zeta)\,\boldsymbol{v}^{(f)},\ \ (1-\zeta)\chi^{\varepsilon_k}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}}{\partial t^2}\rightharpoonup(1-\zeta)\,\frac{\partial\boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}.$$

слабо в $L_2(Q_T)$ и $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ при $\varepsilon_k\to 0$. В дополнении к сказанному

$$\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}\to 0\ \text{ сильно в }\ \boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$$

при $\varepsilon_k\to 0$. Согласно теоремы Нгуетсенга, существует 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ функция $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ такая, что

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)}}{\partial t}\to\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\ \text{ двухмасштабно в }\ \boldsymbol{L}_2(Q_T),$$
$$\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)}}{\partial t^2}\to\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\ \text{ двухмасштабно в }\ \boldsymbol{L}_2(Q_T),$$
$$\varepsilon_k\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)}}{\partial t}\big)\to\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\big)\ \text{ двухмасштабно в }\ \boldsymbol{L}_2(Q_T),$$
$$p^{(\varepsilon_k)}\chi^{(\varepsilon_k)}\to p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)\chi(\boldsymbol{y})\ \text{ двухмасштабно в }\ L_2(\Omega_T),$$
$$p^{(\varepsilon_k)}\to p(\boldsymbol{x},t)\ \ \text{ двухмасштабно в }\ \ L_2(\Omega_T^0)$$

при $\varepsilon_k\to 0$. Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

Для функций $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\big)\in\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ справедлива оценка

$$\int_{Q_T}\int_Y\big(\tau_0|\mathbf{V}|^2+\tau_0^2|\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}|^2+|\mathbb{D}\big(y,\mathbf{V})|^2\big)d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}dt\leqslant C_0,\tag{2.14}$$

где C_0 не зависит от τ_0.

Следует отметить, что двухмасштабный предел давления $p(\boldsymbol{x},t)$ для случая $\mu_0=0$ не зависит от переменной $\boldsymbol{y}$ в области Ω^0. И имеет особую форму в области Ω. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *При условии $\mu_0=0$ выполняется следующее соотношение:*

$$P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\chi(\boldsymbol{y})p^{(f)}\,(\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega.$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения перейдем к двухмасштабному пределу в тождестве (1.24). В качестве пробной, выберем функцию $\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon h(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)$, где $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ - произвольная 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ финитная в области Y_f функция, $h(\boldsymbol{x}, t)$ является финитной в области Ω. Тождество (1.24) представим в виде суммы интегралов:

$$I_1^{(\varepsilon)} + I_2^{(\varepsilon)} + I_3^{(\varepsilon)} = I_4^{(\varepsilon)} + I_5^{(\varepsilon)}, \tag{2.15}$$

где

$$I_1^{(\varepsilon)} = -\int_{Q_T} \tau_0\, \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} d\boldsymbol{x}dt, \;\; I_2^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \zeta \mathbb{P}_f : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt,$$

$$I_3^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} (1-\zeta)\mathbb{P} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt, \;\; I_4^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x}dt,$$

$$I_5^{(\varepsilon)} = -\int_{Q_T} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) d\boldsymbol{x}dt.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$I_1^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \tau_0\, \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} \varepsilon h\,(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon) d\boldsymbol{x}dt \to 0,$$

$$I_2^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \zeta\Big(\alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}) - p^{\varepsilon}\, \mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt \to 0.$$

Рассмотрим интеграл $I_3^{(\varepsilon)}$:

$$I_3^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} (1-\zeta)\mathbb{P} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= \int_{Q_T} (1-\zeta)\Big(\alpha_\mu \chi^{(\varepsilon)} \mathbb{D}\big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\big) + \alpha_\lambda (1-\chi^{(\varepsilon)}) \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)})\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt -$$

$$-\int_{\Omega_T} p^{(\varepsilon)} \mathbb{I} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt \to -\int_{\Omega_T} h(\boldsymbol{x}, t) \int_Y P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt,$$

так как $supp\, \boldsymbol{\varphi}_0 \subset Y_f$ и $\alpha_\mu \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

$$I_4^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x}dt = \int_{Q_T} \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \boldsymbol{e} \cdot \varepsilon\, h(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon) d\boldsymbol{x}dt \to 0.$$

К интегралу $I_5^{(\varepsilon)}$ применим теорему Гаусса - Остроградского ([32, с.22]):

$$I_5^{(\varepsilon)} = -\int_{Q_T} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0(t)) d\boldsymbol{x} dt = -\int_{\partial Q_T} \boldsymbol{\varphi}\, p^0(t)\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, d\sigma dt =$$

$$-\int_{\partial Q_T} \varepsilon\, h(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\, p^0(t)\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, d\sigma dt \to 0$$

Таким образом, в пределе при $\varepsilon \to 0$ получается тождество

$$\int_{\Omega_T} h(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} dt \int_Y P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = 0,$$

верное для любой гладкой функции $h(\boldsymbol{x}, t)$.

К последнему равенству применим формулу интегрирования по частям, принимая во внимание периодичность функции $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ в Y_f. В силу произвольного выбора функций $h(\boldsymbol{x}, t)$ и $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$, получаем

$$\nabla_y\, P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0, \;\; \boldsymbol{y} \in Y_f,$$

что в свою очередь доказывает утверждение леммы 2.1. $\square$

Можно показать, что двухмасштабный предел скорости равен ее слабому пределу, а именно

$$\zeta\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \zeta\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.16}$$

Перейдем к двухмасштабному пределу в интегральном тождестве (1.24) при $\varepsilon \to 0$ с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\psi(\boldsymbol{x}, t)$, где $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ является 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функцией такой, что $supp\, \boldsymbol{\varphi}_0 \subset Y_f$ и $\nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ для $\boldsymbol{y} \in Y$. Функция $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ финитна в области Ω_T^0 и является гладкой. Интегральное тождество (1.24) запишем в виде суммы интегралов, воспользовавшись представлением (2.15).

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$I_1^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \tau_0\, \tilde{\varrho}^{\,\varepsilon} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\, \psi(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) d\boldsymbol{x} dt =$$

$$\int_{Q_T} \tau_0\, (\zeta \varrho_f + (1-\zeta)(\chi^{(\varepsilon)} \varrho_f + (1-\chi^{(\varepsilon)})\varrho_s)) \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\, \psi(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) d\boldsymbol{x} dt \to$$

$$\to \int_{Q_T} \int_Y \zeta \tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, \psi(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} dt d\boldsymbol{y}.$$

Интеграл по области Ω_T исчезает в силу финитности функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$ в области Ω_T^0.

$$I_2^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \zeta\Big(\alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}) - p^\varepsilon\,\mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= \int_{Q_T} \zeta\Big(\alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) - p^\varepsilon\,\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big) d\boldsymbol{x}dt \to$$

$$\to -\int_{\Omega_T^0}\int_Y p(\boldsymbol{x},t)\nabla\psi\cdot\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.$$

Рассмотрим интеграл $I_3^{(\varepsilon)}$:

$$I_3^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} (1-\zeta)\Big(\chi^{(\varepsilon)}\alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) +$$

$$+ (1-\chi^{(\varepsilon)})\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}) - p^{(\varepsilon)}\,\mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt \to 0$$

поскольку $supp\,\psi(\boldsymbol{x},t)\subset\Omega_T^0$.

$$I_4^{(\varepsilon)} =$$

$$= \int_{Q_T} (\zeta\varrho_f + (1-\zeta)(\chi^{(\varepsilon)}\varrho_f + (1-\chi^{(\varepsilon)})\varrho_s))\boldsymbol{e}\cdot\,\psi(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) d\boldsymbol{x}dt \to$$

$$\to \int_{Q_T}\int_Y \zeta\varrho_f\boldsymbol{e}\cdot\,\psi(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.$$

К интегралу $I_5^{(\varepsilon)}$ применим формулу Гаусса-Остроградского ([32, с.22]):

$$I_5^{(\varepsilon)} = -\int_{Q_T}\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0) d\boldsymbol{x}dt = -\int_{\partial Q_T}\boldsymbol{\varphi}\,p^0\,\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= -\int_{\partial Q_T}\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\,\psi(\boldsymbol{x},t)\,p^0\,\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{x}dt \to 0.$$

Таким образом, в пределе при $\varepsilon\to 0$ получается следующее тождество

$$\int_{\Omega_T^0}\Big((A - \varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a})\,\psi(\boldsymbol{x},t) - p(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi\Big) d\boldsymbol{x}dt = 0,$$

где

$$A = \int_Y \tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \langle\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\varphi}_0\rangle_Y.$$

В качестве пробной функции взята гладкая функция $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ такая, что $\nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ для $\boldsymbol{y} \in Y$ и $supp\, \boldsymbol{\varphi}_0 \subset Y_f$, кроме того $\langle \boldsymbol{\varphi}_0 \rangle_Y = \boldsymbol{a}$ – ее усреднение, где $\boldsymbol{a}$ – произвольный единичный вектор.

Далее, отметим, что в силу произвольного выбора пробной функции $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ и вектора $\boldsymbol{a}$ в последнем тождестве, существует $p(\boldsymbol{x}, t)$, обладающий свойством $\nabla\, p \in L_2(\Omega_T^0)$. В связи с этим, интегральное тождество примет вид

$$\int_{\Omega_T^0} \Big(\big(A - (\varrho_f\, \boldsymbol{e} - \nabla\, p) \big) \cdot \boldsymbol{a} \Big) \psi d\boldsymbol{x} dt = 0.$$

Произвольный выбор $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ позволяет «снять» интегрирование по переменным $\boldsymbol{x}, t$, что тем самым влечет интегральное тождество

$$\int_Y (\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} - \varrho_f\, \boldsymbol{e} + \nabla\, p) \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 d\boldsymbol{y} = 0,$$

верное для любой гладкой финитной в Y функции $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$, которое эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \varrho_f\, \boldsymbol{e} - \nabla\, p(\boldsymbol{x}, t).$$

Последнее доказывает утверждение (2.16), и в то же время, уравнение баланса импульса в (2.1).

Учитывая сильную сходимость последовательности $\{\frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}$ к нулю, получаем, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} = \zeta \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} + (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)} \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} + (1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)}) \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \to$$
$$\to \zeta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + (1-\zeta)\chi(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$$

двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \to 0$ или

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \zeta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + (1-\zeta)\chi(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}). \tag{2.17}$$

Таким образом, функция $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0$ в области Y_s. В силу неравенства Пуанкаре - Фридрихса и с учетом (2.14), получим

$$\int_{Q_T} \int_Y |\boldsymbol{V}|^2 d\boldsymbol{x} dt d\boldsymbol{y} \leqslant C_0 \int_{Q_T} \int_Y |\mathbb{D}(y, \boldsymbol{V})|^2 d\boldsymbol{x} dt d\boldsymbol{y} \leqslant C_0. \tag{2.18}$$

Далее, перейдем к двухмасштабному пределу в интегральном тождестве (1.24) при $\varepsilon \to 0$ с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\psi(\boldsymbol{x}, t)$, где $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ – 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ такая, что $supp\, \boldsymbol{\varphi}_0 \subset Y_f$ и $\nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ для $\boldsymbol{y} \in Y$. Функция $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ является гладкой, равной нулю при $t = T$ и на границе S^2. Тождество (1.24) представим в виде (2.15). Тогда при $\varepsilon \to 0$:

$$I_1^{(\varepsilon)} = -\int_{Q_T} \tau_0\, \tilde{\varrho}^{\,\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} d\boldsymbol{x}dt \to$$
$$\to \int_{\Omega_T^0} \int_Y \tau_0\, \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \psi d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y} + \int_{\Omega_T} \int_Y \tau_0 \varrho_f \chi(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \psi d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.$$

Интеграл $I_2^{(\varepsilon)}$:

$$I_2^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \zeta\, \mathbb{P}_f : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$
$$= \int_{\Omega_T^0} \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt - \int_{\Omega_T^0} p^{\,\varepsilon}\, \mathbb{I} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$
$$= \int_{\Omega_T^0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}) : \Big(\frac{\varepsilon^2}{2}(\nabla\psi \otimes \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 \otimes \nabla\psi) + \psi \cdot \varepsilon \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}_0)\Big) d\boldsymbol{x}dt -$$
$$- \int_{\Omega_T^0} p^{\,\varepsilon} \left(\boldsymbol{\varphi}_0 \nabla \psi + \psi\, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_0\right) d\boldsymbol{x}dt \to$$
$$\to \int_{\Omega_T^0} \int_Y \mu_1 \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}_0)\, \psi\, d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y} - \int_{\Omega_T^0} \int_Y p(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \nabla\, \psi d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.$$

Здесь $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}$ - тензорное произведение двух векторов (см. [32] с. 16). Рассмотрим интеграл $I_3^{(\varepsilon)}$:

$$I_3^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} (1-\zeta) \mathbb{P} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) dxdt = \int_{\Omega_T} \chi^{(\varepsilon)} \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt +$$
$$+ \int_{\Omega_T} (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt - \int_{\Omega_T} p^{\,\varepsilon}\, \mathbb{I} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$
$$= \int_{\Omega_T} \chi^{(\varepsilon)} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} \mathbb{D}(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}) : \Big(\frac{\varepsilon^2}{2}(\nabla\psi \otimes \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 \otimes \nabla\psi) + \psi \cdot \varepsilon \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}_0)\Big) d\boldsymbol{x}dt +$$
$$+ \int_{\Omega_T} (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2} \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{\,\varepsilon}) : \Big(\frac{\varepsilon^2}{2}(\nabla\psi \otimes \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 \otimes \nabla\psi) + \psi \cdot \varepsilon \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}_0)\Big) d\boldsymbol{x}dt -$$
$$- \int_{\Omega_T} p^{\,\varepsilon} \left(\boldsymbol{\varphi}_0 \nabla \psi - \psi\, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_0\right) d\boldsymbol{x}dt \to$$

учитывая, что $supp\,\boldsymbol{\varphi}_0 \subset Y_f$ и $\nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ для $\boldsymbol{y} \in Y$, получим

$$\to \int_{\Omega_T} \int_Y \psi\, \mu_1\, \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}_0)\, d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y} -$$

$$- \int_{\Omega_T} \int_Y p^{(f)}(\boldsymbol{x}, t)\, \nabla\, \psi\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.$$

Интеграл $I_4^{(\varepsilon)}$:

$$I_4^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T^0} \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\, \psi\, d\boldsymbol{x}dt +$$

$$+ \int_{\Omega_T} (\chi^{(\varepsilon)} \varrho_f + (1 - \chi^{(\varepsilon)}) \varrho_s)\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\, \psi\, d\boldsymbol{x}dt \to$$

$$\to \int_{\Omega_T^0} \int_Y \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \psi\, d\boldsymbol{x}dtdy + \int_{\Omega_T} \int_Y \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \psi\, d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.$$

Интеграл $I_5^{(\varepsilon)}$:

$$I_5^{(\varepsilon)} = - \int_{Q_T} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} p^0) d\boldsymbol{x}dt \to - \int_{Q_T} \int_Y p^0\, \nabla\psi\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.$$

Объединим полученные после предельного перехода слагаемые.

$$\int_{Q_T} \int_Y p^0\, \nabla\psi\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y} +$$

$$\int_{\Omega_T^0} \int_Y \Big(\tau_0\, \varrho_f\, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \psi - p\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) \nabla\psi - \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \psi\Big) d\boldsymbol{x}dt +$$

$$+ \int_{\Omega_T} \int_Y \Big(\tau_0\, \varrho_f\, \chi(\boldsymbol{y})\, \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \psi + \mu_1\, \psi\, \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}_0) -$$

$$- p^{(f)}(\boldsymbol{x}, t)\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \nabla\, \psi - \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, \psi\Big) d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y} = 0.$$

Далее, введем обозначения. Пусть

$$\boldsymbol{a} = \int_Y \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{\varphi}_0 \rangle_Y,\ \ \boldsymbol{v}^{(f)} = \int_Y \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\, \chi(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{V} \chi \rangle_Y,$$

$$B = \int_Y \mu_1 \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{V}\big) : \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{\varphi}_0\big) d\boldsymbol{y} = \mu_1 \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{V}\big) : \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{\varphi}_0\big) \rangle_Y.$$

Тогда интегральное тождество примет вид

$$\int_{Q_T} \boldsymbol{a} \cdot \nabla(\, p^0\, \psi) d\boldsymbol{x}dt + \int_{\Omega_T^0} \big((\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \varrho_f\, \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{a}\, \psi - p\, \boldsymbol{a} \cdot \nabla\psi\big) d\boldsymbol{x}dt +$$

$$+\int_{\Omega_T}\Big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{a}\,\psi+B\,\psi-p^{(f)}\,\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi\Big)d\boldsymbol{x}dt=0. \qquad (2.19)$$

Из последнего получаем, что $\nabla\,p\in L_2(\Omega_T^0)$, $\nabla\,p^{(f)}\in L_2(\Omega_T)$:

$$\int_{\Omega_T^0}|\nabla\,p(\boldsymbol{x},t)|^2d\boldsymbol{x}dt+\int_{\Omega_T}|\nabla\,p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)|^2d\boldsymbol{x}dt\leqslant C_0. \qquad (2.20)$$

Тождество (2.19) содержит условие непрерывности (2.4) на общей границе S^0, граничные условия (2.6) и (2.8) на внешней границе S, начальное условие (2.9).

Перепишем тождество (2.19) в следующем виде:

$$\int_0^T\int_{\partial Q}\boldsymbol{a}\,p^0\,\psi\,\boldsymbol{n}\,d\sigma dt+\int_{\Omega_T^0}\big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{a}\,\psi-p\,\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi\big)d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_{\Omega_T}\Big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{a}\,\psi+B\,\psi-p^{(f)}\,\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi\Big)d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Для пробной функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ финитной в области Ω_T^0 имеем:

$$\int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\,\psi(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{a}-(\varrho_f\,\boldsymbol{e}\,\psi+p\,\nabla\psi)\big)\cdot\boldsymbol{a}d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Интегрируем первое слагаемое по частям по переменной t с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T)=0$:

$$\int_0^T\int_{\Omega^0}\Big(\tau_0\varrho_f\,\boldsymbol{v}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}+(\varrho_f\,\boldsymbol{e}\,\psi+p\,\nabla\psi)\Big)\cdot\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{x}dt=-\int_{\Omega^0}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)\,\psi(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}.$$

Для функции $\psi(\boldsymbol{x},0)=0$, получаем

$$\int_0^T\int_{\Omega^0}\Big(\tau_0\varrho_f\,\boldsymbol{v}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}+(\varrho_f\,\boldsymbol{e}\,\psi+p\,\nabla\psi)\Big)\cdot\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Выбрав в качестве пробной функции $\psi(\boldsymbol{x},0)=1$, получим начальное условие (2.9).

Для доказательства (2.4) выберем в (2.19) пробную функцию $\psi(\boldsymbol{x},t)$ финитную в шаре с центром в точке $\boldsymbol{x}^0\in S^0$, получим:

$$\int_{\Omega_T^0}\big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{a}\,\psi-p\,\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi\big)d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_{\Omega_T}\Big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}-\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{a}\,\psi+B\,\psi-p^{(f)}\,\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi\Big)d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\int_{\Omega^0_T}\big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{a}\,\psi+\nabla p\,\boldsymbol{a}\cdot\psi\big)d\boldsymbol{x}dt+$$

$$\int_{\Omega_T}\Big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}-\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{a}\,\psi+B\,\psi+\nabla p^{(f)}\,\boldsymbol{a}\cdot\psi\Big)d\boldsymbol{x}dt-$$

$$-\int_0^T\int_{S^0}p\,\boldsymbol{a}\cdot\psi\,\boldsymbol{n}d\sigma dt-\int_0^T\int_{S^0}p^{(f)}\,\boldsymbol{a}\cdot\psi\,\boldsymbol{n}d\sigma dt=0.$$

Выбрав в качестве пробной, финитную на границе S^0 функцию $\psi(\boldsymbol{x},t)$, получим (2.4).

Чтобы получить граничное условие (2.6), выберем в тождестве (2.19) пробную функцию $\psi(\boldsymbol{x},t)$ финитную в области Ω^0_T.

$$\int_{\Omega^0_T}\boldsymbol{a}\cdot\nabla(\,p^0\,\psi)d\boldsymbol{x}dt+\int_{\Omega^0_T}\big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{a}\,\psi-p\,\boldsymbol{a}\cdot\nabla\psi\big)d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Далее, пусть $\psi(\boldsymbol{x},t)$ гладкая такая, что $\psi(\boldsymbol{x},t)=\psi_1(t)\,\psi_0(\boldsymbol{x})$, тогда

$$\boldsymbol{a}\int_{\Omega^0_T}p^0\,\psi_1\cdot\nabla(\psi_0)d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\,\boldsymbol{a}\int_{\Omega^0_T}\big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\,\psi_1\,\psi_0-p\,\psi_1\cdot\nabla(\psi_0)\big)d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Или

$$\boldsymbol{a}\int_0^T\psi_1\Big(\int_{\Omega^0}\big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\psi_0+(p^0-p)\cdot\nabla(\psi_0)\big)d\boldsymbol{x}\Big)dt=0.$$

Из последнего следует, что $\nabla(p^0-p)\in L_2(\Omega^0)$. В силу произвольного выбора функции $\psi_1(t)$ в последнем равенстве можно «снять» интегрирование по переменной t. Применяем формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\int_{\Omega^0}\big((\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\,-\nabla(p^0-p)\big)\,\psi_0\,d\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega^0}(p^0-p)\,\psi_0\,\boldsymbol{n}d\sigma=0.$$

Выбрав функцию $\psi_0(\boldsymbol{x})$ финитную на границе S^1_0, получаем равенство

$$\int_{S^1_0}(p^0-p)\,\psi_0\,\boldsymbol{n}d\sigma=0,$$

из которого в силу произвольного выбора функции $\psi_0(\boldsymbol{x})$ следует граничное условие (2.6).

Выбирая в тождестве (2.19) пробную функцию финитную в области Ω_T и проводя аналогичные рассуждения, можно показать справедливость граничного условия (2.8).

Тождество (2.19) для финитной в области Ω_T функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$ приобретает вид:

$$\int_{\Omega_T}\psi(\boldsymbol{x},t)\int_{Y_f}\Big(\big(\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\, p^{(f)}-\varrho_f\,\boldsymbol{e}\big)\cdot\boldsymbol{\varphi}_0+ \\ +\mu_1\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}):\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{\varphi}_0\big)\Big)d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}=0,\quad \forall\psi(\boldsymbol{x},t).$$

Отсюда

$$\int_{Y_f}\Big(\big(\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\, p^{(f)}-\varrho_f\,\boldsymbol{e}\big)\cdot\boldsymbol{\varphi}_0+\mu_1\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}):\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{\varphi}_0\big)\Big)d\boldsymbol{y}=0. \quad (2.21)$$

Для любой гладкой соленоидальной функции $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ получим дифференциальное уравнение

$$\tau_0\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}-\mu_1\nabla_y\cdot\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V})=-\nabla_y\,\Pi-\nabla\, p^{(f)}+\varrho_f\,\boldsymbol{e} \qquad (2.22)$$

в области Y_f для $t>0$ и для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$.

Функция $\nabla_y\,\Pi$ появляется в силу условия $\nabla_y\cdot\boldsymbol{\varphi}_0=0$ на произвольную функцию $\boldsymbol{\varphi}_0$.

Уравнение неразрывности (1.6) запишем в форме интегрального тождества

$$\int_{Q_T}\nabla\xi\,\cdot\,\Big(\zeta\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}+(1-\zeta)\big(\chi^{(\varepsilon)}\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}+(1-\chi^{(\varepsilon)})\,\frac{\partial\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t}\big)\Big)d\boldsymbol{x}dt=0, \quad (2.23)$$

которое выполняется для любой гладкой функции $\xi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю на части S^1 внешней границы S.

Перейдем к пределу в тождестве (2.23) при $\varepsilon\to 0$. Для этого представим его в виде суммы интегралов:

$$I_1^{(\varepsilon)}+I_2^{(\varepsilon)}+I_3^{(\varepsilon)}=0,$$

где

$$I_1^{(\varepsilon)}=\int_{Q_T}\nabla\xi\,\cdot\,\zeta\,\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}d\boldsymbol{x}dt,\;\; I_2^{(\varepsilon)}=\int_{Q_T}\nabla\xi\,\cdot\,(1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}d\boldsymbol{x}dt,$$

$$I_3^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \nabla\xi \,\cdot\, (1-\zeta)(1-\chi^{(\varepsilon)})\,\frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x}dt.$$

При $\varepsilon \to 0$

$$I_1^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \nabla\xi \,\cdot\, \zeta\,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x}dt \rightharpoonup \int_{Q_T} \nabla\xi \,\cdot\, \zeta\,\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}dt,$$

$$I_2^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \nabla\xi \,\cdot\, (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t} d\boldsymbol{x}dt \rightharpoonup \int_{Q_T} \nabla\xi \,\cdot\, (1-\zeta)\boldsymbol{v}^{(f)} d\boldsymbol{x}dt.$$

Учитывая сильную сходимость последовательности $\{\dfrac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}$ к нулю, интеграл $I_3^{(\varepsilon)} \to 0$.

Окончательно, при $\varepsilon \to 0$ тождество (2.23) примет вид:

$$\int_0^T \int_Q \nabla\xi \,\cdot\, \big(\zeta\,\boldsymbol{v} + (1-\zeta)\boldsymbol{v}^{(f)}\big) d\boldsymbol{x}dt = 0. \tag{2.24}$$

(2.24) эквивалентно уравнению неразрывности в (2.1), уравнению неразрывности (2.2), условию непрерывности (2.5) на общей границе S^0 и граничному условию (2.7).

Выберем в (2.24) функцию $\xi(\boldsymbol{x},t)$ гладкую финитную в области Ω_T. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla\xi(\boldsymbol{x},t) \,\cdot \boldsymbol{v}^{(f)} d\boldsymbol{x}dt = -\int_0^T \int_\Omega \xi(\boldsymbol{x},t)\,\nabla\cdot \boldsymbol{v}^{(f)} d\boldsymbol{x}dt = 0,$$

то есть

$$\int_0^T \int_\Omega \xi(\boldsymbol{x},t)\,\nabla\cdot \boldsymbol{v}^{(f)} d\boldsymbol{x}dt = 0.$$

Откуда следует уравнение неразрывности (2.2):

$$\nabla\cdot \boldsymbol{v}^{(f)} = 0.$$

Пусть теперь функция $\xi(\boldsymbol{x},t)$ – произвольная гладкая, равная нулю на части S_T^2 внешней границы области Q. Тогда по теореме Гаусса-Остроградского ([32, с.22]) последний интеграл равен

$$\int_0^T \int_\Omega \xi\,\nabla\cdot \boldsymbol{v}^{(f)} d\boldsymbol{x}dt = \int_0^T \int_{S^2} (\xi\,\cdot \boldsymbol{v}^{(f)})\cdot \boldsymbol{n}\,ds = 0,$$

откуда следует условие (2.7) на границе S^2.

Уравнение неразрывности (2.1) будет получено, если в (2.24) в качестве пробной взять гладкую функцию $\xi(\boldsymbol{x},t)$, финитную в области Ω^0_T.

В (2.24) для пробной функции $\xi(\boldsymbol{x},t)$ – гладкой, финитной в шаре с центром в точке $\boldsymbol{x}\in S^0$, имеем:

$$\int_{\Omega^0_T}\nabla\xi\ \cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}dt+\int_{\Omega_T}\nabla\xi\ \cdot\boldsymbol{v}^{(f)}d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$-\int_{\Omega^0_T}\xi\ \cdot\nabla\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}dt-\int_{\Omega_T}\xi\ \cdot\nabla\boldsymbol{v}^{(f)}d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_0^T\int_{S^0}\xi\ \cdot\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{x}dt+\int_0^T\int_{S^0}\xi\ \cdot\boldsymbol{v}^{(f)}\,\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Для функции $\xi(\boldsymbol{x},t)$ финитной на границе S^0 будем иметь равенство

$$\int_0^T\int_{S^0}\xi\ \cdot\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{x}dt+\int_0^T\int_{S^0}\xi\ \cdot\boldsymbol{v}^{(f)}\,\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{x}dt=0,$$

из которого следует условие (2.5).

Перейдем к пределу в тождестве (2.23) при $\varepsilon\to 0$ с пробной функцией $\xi=\varepsilon\,\xi_0(\boldsymbol{x},t)\xi_1\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)$, где $\xi_1(\boldsymbol{y})$ – гладкая 1-периодическая функция и $supp\,\xi_0\subset\Omega_T$. Для этого, как было показано выше, при выводе равенства (2.24), представим тождество (2.23) в виде суммы интегралов:

$$I_1^{(\varepsilon)}+I_2^{(\varepsilon)}+I_3^{(\varepsilon)}=0.$$

Тогда, при $\varepsilon\to 0$ интеграл $I_1^{(\varepsilon)}\to 0$, поскольку $supp\,\xi_0\subset\Omega_T$.
Интеграл $I_2^{(\varepsilon)}=$

$$=\int_{Q_T}\nabla\xi\ \cdot\ (1-\zeta)\chi^{(\varepsilon)}\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}d\boldsymbol{x}dt=\int_{\Omega_f}\nabla\big(\varepsilon\,\xi_0(\boldsymbol{x},t)\,\xi_1(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\big)\ \cdot\ \frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}d\boldsymbol{x}dt=$$

$$=\int_{\Omega_f}\big(\xi_0(\boldsymbol{x},t)\nabla\,\xi_1(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})+\varepsilon\,\xi_1(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\,\nabla\xi_0(\boldsymbol{x},t)\big)\ \cdot\ \frac{\partial\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}d\boldsymbol{x}dt\to$$

$$\to\int_{\Omega_T}\xi_0(\boldsymbol{x},t)\,\Big(\int_{Y_f}\nabla_y\xi_1(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\Big)d\boldsymbol{x}dt.$$

В силу сильной сходимости последовательности $\{\dfrac{\partial\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}$ к нулю, интеграл $I_3^{(\varepsilon)}\to 0$.

Окончательно, при $\varepsilon \to 0$ тождество (2.23) примет вид:

$$\int_{\Omega_T} \xi_0(\boldsymbol{x},t)\Big(\int_{Y_f} \nabla_y \xi_1(\boldsymbol{y})\cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\Big)d\boldsymbol{x}dt = 0.$$

В полученном равенстве воспользуемся формулой интегрирования по частям, принимая во внимание периодичность функции ξ_1. В силу произвольного выбора функций $\xi_0(\boldsymbol{x},t)$ и $\xi_1(\boldsymbol{y})$ в последнем соотношении можно «снять» интегрирование по переменным $\boldsymbol{x}, t$, затем по переменной $\boldsymbol{y}$. Тем самым получим микроскопическое уравнение неразрывности в дифференциальной форме

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{V} = 0,\ \ \boldsymbol{y} \in Y_f. \tag{2.25}$$

Представление (2.17) и гладкость функции $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, очевидно, подразумевает граничное условие

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = 0,\ \ \boldsymbol{y} \in \gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s. \tag{2.26}$$

Для нахождения функции $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ объединяем дифференциальные уравнения (2.22) и (2.25) и граничное условие (2.26) с начальным условием

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},0,\boldsymbol{y}) = 0,\ \ \boldsymbol{y} \in Y_f. \tag{2.27}$$

Решение $\{\boldsymbol{V}, \Pi\}$ периодической начально-краевой задачи (2.22), (2.25) – (2.27) будем искать в следующем виде

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y},t-\tau)\cdot\big(-\frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big)d\tau,$$

$$\Pi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_i^{(f)}(\boldsymbol{y},t-\tau)\big(-\frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big)d\tau.$$

Лемма 2.2 *Для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ функция $\boldsymbol{v}^{(f)} = \langle \chi\, \boldsymbol{V}\rangle_Y$ определяется из уравнения (2.3), где*

$$\mathbb{B}^{(f)}(\tau_0;t) = \sum_{i=1}^{3}\big(\int_{Y_f} \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y},t)dy\big)\otimes \boldsymbol{e}_i \tag{2.28}$$

и $\boldsymbol{V}_i^{(f)}$, $i = 1,2,3$ являются решениями следующей периодической начально-краевой задачи

$$\tau_0\varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{V}_i^{(f)}}{\partial t} = \mu_1 \nabla_y \cdot \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{V}_i^{(f)}\big) - \nabla_y \Pi_i^{(f)},\ \ (\boldsymbol{y},t) \in Y_f \times (0,T), \tag{2.29}$$

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{V}_i^{(f)} = 0,\ (\boldsymbol{y}, t) \in Y_f,\ t > 0, \tag{2.30}$$

$$\tau_0 \varrho_f \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, 0) = \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y} \in Y_f, \tag{2.31}$$

$$\boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t) = 0,\ \boldsymbol{y} \in \gamma,\ t > 0. \tag{2.32}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, 0)\big(- \frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i} + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big) + \\ + \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{V}_i^{(f)}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \cdot \big(- \frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big) d\tau,$$

применяя условие (2.31), получим:

$$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \big(- \frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i} + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big) + \\ + \tau_0\, \varrho_f \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{V}_i^{(f)}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \cdot \big(- \frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big) d\tau = \\ = \nabla_y \cdot \Big(\sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\mu_1}{2} \nabla_y \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t-\tau) - \mathbb{I}\, \Pi_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \Big) \cdot \big(- \frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau) + \\ + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big) d\tau - \nabla_x\, p^{(f)} + \varrho_f\, \boldsymbol{e}.$$

или

$$\sum_{i=1}^{3} \int_0^t \tau_0\, \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{V}_i^{(f)}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \cdot \big(- \frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big) d\tau = \\ = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \nabla_y \cdot \Big(\frac{\mu_1}{2} \nabla_y \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t-\tau) - \mathbb{I}\, \Pi_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \Big) \cdot \\ \cdot \big(- \frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i\big) d\tau.$$

Последнее верно, если

$$\tau_0\, \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{V}_i^{(f)}}{\partial t} = \nabla_y \cdot \Big(\frac{\mu_1}{2} \nabla_y \boldsymbol{V}_i^{(f)} - \Pi_i^{(f)} \mathbb{I} \Big).$$

Получим уравнение неразрывности (2.30):

$$\nabla_y \cdot \Big(\sum_{i=1}^{3} \int_0^t \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t-\tau)\big(-\frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i \big) d\tau \Big) = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{3} \int_0^t \nabla_y \cdot \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t-\tau)\big(-\frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i \big) d\tau = 0,$$

что справедливо, если

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{V}_i^{(f)} = 0 \ \ \boldsymbol{y} \in Y_f.$$

Далее имеем:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y}, t) = 0, \ \ (\boldsymbol{y}, t) \in \gamma \times (0; T)$$

или

$$\sum_{i=1}^{3} \int_0^t \nabla_y \cdot \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t-\tau)\big(-\frac{\partial p^{(f)}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, \tau) + \varrho_f\, \boldsymbol{e}_i \big) d\tau = 0,$$

последнее возможно при выполнении условия (2.32).

Заметим, что задачу (2.29) – (2.32) следует понимать как интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{Y_f} \Big(\tau_0\, \varrho_f \boldsymbol{V}_i^{(f)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \frac{\mu_1}{2} \nabla \boldsymbol{V}_i^{(f)} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \Big) d\boldsymbol{y} dt = -\int_{Y_f} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}, 0) d\boldsymbol{y}$$

для некоторой соленоидальной 1-периодической гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, исчезающей на γ и при $t = T$.

Корректность задач (2.29) – (2.32) следует из энергетических тождеств

$$\int_{Y_f} \Big(\varrho_f \big| \frac{\partial \boldsymbol{V}_i^{(f)}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t) \big|^2 + \frac{\mu_1}{2} |\nabla \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t)|^2 \Big) d\boldsymbol{y} = \frac{m}{\varrho_f},$$

которые получим, умножив равенства (2.29) на функции $\boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t)$ и интегрировав их по области $Y_f \times (0, t)$:

$$\int_0^t \int_{Y_f} \Big(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \big(\tau_0\, \varrho_f |\boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t)|^2 + \frac{\mu_1}{2} |\nabla \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t)|^2 \big) -$$

$$- \Pi_i^{(f)} \nabla_y \cdot \boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t) \Big) d\boldsymbol{y} dt = 0.$$

Принимая во внимание соленоидальность функций $\boldsymbol{V}_i^{(f)}$ и условие $|\boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y}, t)|^2 \Big|_{t=0} = \dfrac{1}{{\varrho_f}^2}$, получим требуемое.

По определению

$$\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=\int_{Y_f}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}=$$

$$=\int_0^t\Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\int_{Y_f}\boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)\otimes\boldsymbol{e}_i\Big)\big(-\nabla p^{(f)}(\boldsymbol{x},\tau)+\varrho_f\,\boldsymbol{e}\big)d\tau=$$

$$=\int_0^t\mathbb{B}^{(f)}(\tau_0,t-\tau)\big(-\nabla p^{(f)}(\boldsymbol{x},\tau)+\varrho_f\,\boldsymbol{e}\big)d\tau.$$

Таким образом получено (2.3), где

$$\mathbb{B}^{(f)}(\tau_0,t-\tau)=\sum_{i=1}^{3}\big(\int_{Y_f}\boldsymbol{V}_i^{(f)}(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}\big)\otimes\boldsymbol{e}_i.$$

$\square$

Следует отметить, что оценка (2.10) следует из (2.14), (2.18) и (2.20) с учетом

$$\boldsymbol{v}^{(f)}=\int_{Y}\chi\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}=\langle\boldsymbol{V}\chi\rangle_Y,$$

$$\boldsymbol{v}=\int_{Y}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}=\langle\boldsymbol{V}\rangle_Y.$$

Лемма 2.3. *Усредненная задача (2.1) – (2.9) имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть четыре пары функций ($\boldsymbol{v}_1$,p_1), ($\boldsymbol{v}_2$,p_2) и ($\boldsymbol{v}_1^{(f)}$,$p_1^{(f)}$), ($\boldsymbol{v}_2^{(f)}$,$p_2^{(f)}$) – различные решения задачи (2.1) – (2.9), соответственно, в областях Ω^0 и Ω. И функции $\boldsymbol{v}$, p, $\boldsymbol{v}^{(f)}$, $p^{(f)}$ такие, что $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{v}^1$, $p=p_2-p_1$, $\boldsymbol{v}^{(f)}=\boldsymbol{v}_2^{(f)}-\boldsymbol{v}_1^{(f)}$, $p^{(f)}=p_2^{(f)}-p_1^{(f)}$.

Умножим динамическое уравнение в (2.1) на функцию $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ и интегрируем по области Ω^0:

$$\int_{\Omega^0}\tau_0\varrho_f\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}+\int_{\Omega^0}\nabla\,p\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}=0. \tag{2.33}$$

Уравнение (2.3) дифференцируем по переменной t, умножаем на функцию $\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)$ и интегрируем по области Ω:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\boldsymbol{v}^{(f)}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}^{(f)}\,d\boldsymbol{x}=-\int_{\Omega}\mathbb{B}^{(f)}(\tau_0;t)\cdot\nabla p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{v}^{(f)}\,d\boldsymbol{x}. \tag{2.34}$$

Суммируем (2.33) и (2.34). Применяем формулу интегрирования по частям с учетом уравнения неразрывности в (2.1) и (2.2). Принимая во внимание краевые условия, получим:

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{\Omega^0}|\boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega}|\boldsymbol{v}^{(f)}|^2\, d\boldsymbol{x}\Big) = 0.$$

Последнее, в силу нулевых начальных условий, гарантирует равенство нулю функций $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}^{(f)}$. $\square$

§2.3. Доказательство теоремы 2.2

Оценки (2.10), (2.14), (2.18) и (2.20) обеспечивают сильную сходимость последовательности $\{p^k\}$ в $W_2^{1,0}(\Omega_T^0)$, слабую компактность последовательности $\{p^{(f,k)}\}$ в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, слабую компактность последовательности $\{\boldsymbol{v}^{(f,k)}\}$ в $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$ и слабую компактность последовательностей $\{\boldsymbol{V}^k\}$ и $\{\nabla_y \boldsymbol{V}^k\}$ в $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T \times Y_f)$.

Пусть функции $p(\boldsymbol{x},t)$, $p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)$ будут пределами упомянутых последовательностей. Прежде всего заметим, что в силу условия непрерывности (2.4) функции $\tilde{p}^k$, где $\tilde{p}^k = p^k$ в области Ω_T^0 и $\tilde{p}^k = p^{f,k}$ в области Ω_T, принадлежат пространству $W_2^{1,0}(Q_T)$ и ограничены по параметру k. Поэтому, слабый предел $\tilde{p}$ последовательности $\{\tilde{p}^k\}$ в пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)$ совпадает с функцией p в области Ω_T^0 и с функцией $p^{(f)}$ в области Ω_T. Это означает, что функции p и $p^{(f)}$ удовлетворяют условию непрерывности (2.4) на общей границе S^0 и граничным условиям (2.6) на части $S_0^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}_0$ внешней границы S, и условию (2.8) на части $S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}$ внешней границы S.

Далее, заметим, что благодаря сильной сходимости последовательности $\{\Big(\dfrac{1}{k}\Big) \cdot \boldsymbol{v}^k\}$ к нулю в пространстве $L_2(\Omega_T^0)$ функция $p(\boldsymbol{x},t)$ удовлетворяет в области Ω_T^0 первому уравнению в (2.1), которое примет вид

$$\nabla\, p = \varrho_f\, \boldsymbol{e}.$$

Последнее вместе с граничным условием (2.6) приводит к равенству

$$p = p_0(\boldsymbol{x},t) = p^0(t) - \varrho_f x_3,$$

и граничному условию (2.13)

$$p^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=p_0(\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{x}\in S^0.$$

Уравнение неразрывности (2.11) следует из тождества (2.24), записанного для произвольной гладкой функции $\xi=\xi(\boldsymbol{x},t)$ финитной в области Ω_T

$$\int_{\Omega_T}\nabla\xi\cdot\boldsymbol{v}^{(f,k)}d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Перепишем (2.21) с пробной функцией $\psi(t)$ равной нулю при $t=0$ и $t=T$ в следующем виде:

$$\int_0^T\int_{Y_f}\Big(\big(\frac{1}{k}\varrho_f\boldsymbol{V}^k\frac{\partial\psi}{\partial t}+$$

$$+\psi(\nabla\,p^{(f,k)}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\big)\cdot\boldsymbol{\varphi}_0+\psi\mu_1\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{V}^k\big):\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{\varphi}_0\big)\Big)d\boldsymbol{y}dt=0. \qquad (2.33)$$

Перейдем к пределу при $k\to\infty$ в (2.33):

$$\int_0^T\psi\Big(\int_{Y_f}\big((\nabla\,p^{(f)}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{\varphi}_0+\mu_1\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{V}\big):\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{\varphi}_0\big)d\boldsymbol{y}\Big)dt=0.$$

В силу произвольного выбора функции $\psi(t)$, мы можем «снять» интегрирование по переменной t. Тем самым для любой гладкой соленоидальной функции $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ получим интегральное тождество

$$\int_{Y_f}\big((\nabla\,p^{(f)}-\varrho_f\,\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{\varphi}_0+\mu_1\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{V}\big):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{\varphi}_0)\big)d\boldsymbol{y}=0,$$

которое влечет дифференциальное уравнение

$$\mu_1\nabla_y\cdot\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{V}\big)=\nabla_y\,\Pi-\nabla\,p^{(f)}+\varrho_f\,\boldsymbol{e} \qquad (2.34)$$

в области Y_f для $t>0$.

Очевидно, что уравнение неразрывности (2.25) и граничное условие (2.26) для функций $\boldsymbol{V}^k$ останутся справедливыми и для предельной функции $\boldsymbol{V}$.

Лемма 2.4. *Решение*

$$\boldsymbol{v}^{(f)}(\boldsymbol{x},t)=\int_{Y_f}\chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{V}(x,t,y)\,d\boldsymbol{y}$$

задачи (2.25), (2.26), (2.34) определяется из уравнения

$$\boldsymbol{v}^{(f)} = \mathbb{B} \cdot \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, t), \text{ где} \tag{2.35}$$

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\mu_1}(-\nabla_x p^{(f)} + \rho_f \boldsymbol{e}), \tag{2.36}$$

$$\mathbb{B} = \langle \sum_{i=1}^{3} \chi(\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{V}^{(\boldsymbol{i})} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} \rangle_{Y_f}, \tag{2.37}$$

где функции $\boldsymbol{V}^{(\boldsymbol{i})}$, $i = 1, 2, 3$ являются решением периодических краевых задач:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 \triangle_y \boldsymbol{V}^{(i)} - \nabla \Pi^{(i)} = -\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{V}^{(i)} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_f, \\ &\boldsymbol{V}^{(i)} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

Доказательство. Вектор-функцию $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, t)$ представим в виде разложения по ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ в R^3:
$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{3} z_i(x, t)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}$. Вектор-функцию $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ и функцию $\Pi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ представим в виде линейной комбинации:

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{3} z_i(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{V}^{(i)}(\boldsymbol{y}), \quad \Pi = \sum_{i=1}^{3} z_i(\boldsymbol{x}, t)\Pi^{(i)}(\boldsymbol{y}).$$

Подставим их в уравнение (2.34), предварительно записав его в следующем виде

$$\mu_1 \nabla_y \cdot \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{V}\big) - \nabla_y \Pi + \boldsymbol{z} = 0,$$

где функция $\boldsymbol{z}$ задана уравнением (2.36). Имеем

$$\sum_{i=1}^{3} z_i(\boldsymbol{x}, t)(\mu_1 \Delta_y \boldsymbol{V}^{(i)} - \nabla \Pi^{(i)} + \boldsymbol{e}_i) = 0.$$

Последнее равенство будет выполнено, если

$$\mu_1 \Delta_y \boldsymbol{V}^{(i)} - \nabla \Pi^{(i)} + \boldsymbol{e}_i = 0.$$

Подставляя выражение для $\boldsymbol{V}$ в уравнение $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$ и граничное условие $\boldsymbol{V}|_\gamma = 0$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{3} z_i(\boldsymbol{x}, t)\nabla \cdot \boldsymbol{V}^{(i)} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{V}^{(i)} = 0, \quad \boldsymbol{V}^{(i)}|_\gamma = 0.$$

Далее,

$$\boldsymbol{V}=\sum_{i=1}^{3} z_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{V}^{(i)}(y)=\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{e_i})\boldsymbol{V}^{(i)}(y)=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{V}^{(i)}(\boldsymbol{e_i}\cdot\boldsymbol{z})=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\big(\boldsymbol{V}^{(i)}\otimes\boldsymbol{e_i}\big)\boldsymbol{z},$$

$$\boldsymbol{v}^{(f)}=\langle\chi\,\boldsymbol{V}\rangle_{Y_f}=\langle\sum_{i=1}^{3}\big(\chi\,\boldsymbol{V}^{(i)}\otimes\boldsymbol{e_i}\big)\rangle_{Y_f}\boldsymbol{z}=\mathbb{B}\cdot\boldsymbol{z}.$$

Таким образом, получили

$$\boldsymbol{v}^{(f)}=\frac{1}{\mu_1}\langle\sum_{i=1}^{3}\big(\chi\,\boldsymbol{V}^{(i)}\otimes\boldsymbol{e_i}\big)\rangle_{Y_f}(-\nabla_x p+\rho_f\boldsymbol{e})=\frac{1}{\mu_1}\,\mathbb{B}\cdot(-\nabla_x p+\rho_f\boldsymbol{e})$$

уравнение (2.12) для жидкой компоненты. □

Существование и единственность решений задачи (2.38) и свойства матрицы

$$\mathbb{B}=\sum_{i=1}^{3}\Big(\int_{Y_f}\boldsymbol{V}^{(i)}(\boldsymbol{y})dy\Big)\otimes\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{V}^{(i)}\rangle_{Y_f}\otimes\boldsymbol{e}_i, \tag{2.39}$$

следуют из энергетического тождества

$$\int_{Y_f}\nabla\boldsymbol{V}^{(i)}:\nabla\boldsymbol{V}^{(j)}dy=\int_{Y_f}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{V}^{(j)}dy. \tag{2.40}$$

Действительно, записав (2.40) при $i=j$ и используя неравенства Гельдера и Пуанкаре – Фридрихса, получим

$$\int_{Y_f}|\boldsymbol{V}^{(i)}|^2dy\leqslant C^2_{Y_f}\int_{Y_f}|\nabla\boldsymbol{V}^{(i)}|^2dy,\ i=1,2,3,$$

$$\int_{Y_f}|\nabla\boldsymbol{V}^{(i)}|^2dy\leqslant m\,C^2_{Y_f},\ i=1,2,3.$$

Лемма 2.5. *Матрица $\mathbb{B}$ симметрична и положительно определена.*

Доказательство. Рассмотрим $\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ – произвольные постоянные векторы и

$$\boldsymbol{z}_\zeta=\sum_{i=1}^{3}\zeta_i\boldsymbol{V}^{(i)},\ \boldsymbol{z}_\eta=\sum_{i=1}^{3}\eta_i\boldsymbol{V}^{(i)}.$$

Тогда из (2.43) и (2.44) следует

$$\frac{1}{2}\big(\mathbb{B}\cdot\boldsymbol{\zeta}\big)\cdot\boldsymbol{\eta} = \langle \boldsymbol{z}_\zeta\rangle_{Y_f}\cdot\boldsymbol{\eta}, \quad \langle \boldsymbol{z}_\zeta\rangle_{Y_f}\cdot\boldsymbol{\eta} = \langle\nabla\boldsymbol{z}_\zeta : \nabla\boldsymbol{z}_\eta\rangle_{Y_f},$$

или

$$\frac{1}{2}\big(\mathbb{B}\cdot\boldsymbol{\zeta}\big)\cdot\boldsymbol{\eta} = \langle\nabla\boldsymbol{z}_\zeta : \nabla\boldsymbol{z}_\eta\rangle_{Y_f}, \text{ и } \frac{1}{2}\big(\mathbb{B}\cdot\boldsymbol{\zeta}\big)\cdot\boldsymbol{\zeta} = \langle\nabla\boldsymbol{z}_\zeta : \nabla\boldsymbol{z}_\zeta\rangle_{Y_f} > \alpha$$

для некоторого $\alpha > 0$ и произвольного вектора $\boldsymbol{\zeta}$ при $|\boldsymbol{\zeta}| = 1$. В противном случае мы бы имели следующее:

$$\nabla\boldsymbol{z}_\zeta = 0, \ \textit{или } \boldsymbol{z}_\zeta = \mathbb{A}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\zeta}_0,$$

где $\mathbb{A}$ – некоторая постоянная матрица, а $\boldsymbol{\zeta}_0$ – постоянный вектор. Но функция $\boldsymbol{z}_\zeta$ является периодической. И для случая связного порового пространства все периодические линейные функции могут быть только постоянными. Из граничного условия на границе γ для вектор - функций $\boldsymbol{V}^{(i)}$ следует, что $\boldsymbol{z}_\zeta = 0$. Что означает

$$\sum_{i=1}^{3}\zeta_i\boldsymbol{V}^{(i)}(\boldsymbol{y}) = 0, \ |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + |\zeta_3|^2 > 0.$$

Последнее не будет выполняться, так как функции $\boldsymbol{V}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ – линейно независимы. $\square$

Единственность усредненной задачи (2.6), (2.8), (2.11) – (2.13) доказывается аналогично доказательству леммы 2.3.

§2.4. Выводы

Во второй главе проводится усреднение математической модели $\mathbf{M}_1$ в предположении периодичности порового пространства. Для этого применяется стандартная техника гомогенизации в периодической структуре, основанная на методе двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга.

При фиксированном $\tau_0 > 0$ получены усредненные системы линейных дифференциальных уравнений для случая фильтрации слабо вязкой жидкости в поровом пространстве с абсолютно твердым скелетом грунта: $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = \infty$, $0 < \mu_1 < \infty$. Доказано, что решение начально-краевой задачи (2.1) – (2.9) единственно.

Установлено также, что при $\tau_0 \to 0$ усредненная задача (2.1) – (2.9) приводится к системе, состоящей из уравнения гидравлики в водоеме Ω^0 и системы Дарси для скорости жидкой компоненты в области Ω.

Глава 3.

Математические модели фильтрации слабо вязкой жидкости в упругом скелете грунта

В настоящей главе выводятся усредненные системы линейных дифференциальных уравнений для случая фильтрации слабо вязкой жидкости в поровом пространстве с упругим скелетом грунта [70].

§3.1. Основные результаты

Под усредненной будем понимать систему, полученную в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в уравнениях модели $\mathbf{M}_1$ при фиксированном $\tau_0 > 0$. Эта система определяется следующими уравнениями:

$$\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \varrho_f \boldsymbol{e}, \ \ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.1}$$

для давления $p(\boldsymbol{x}, t)$ и скорости жидкости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ в области Ω^0 при $t > 0$ и

$$\tau_0 \hat{\varrho} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e}, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{P}_0^{(s)} = \lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_s) - p\,\mathbb{I}, \tag{3.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}_s = 0 \tag{3.4}$$

для функций $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t)$ и $p(\boldsymbol{x}, t)$ в области Ω при $t > 0$.

Для системы (3.1) – (3.4) будут выполнены следующие условия:

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \tag{3.5}$$

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = - \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \in S^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0}} p(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \tag{3.6}$$

на общей границе S^0, граничное условие

$$\boldsymbol{w}_s = 0 \tag{3.7}$$

на границе S^2, граничное условие

$$p(\boldsymbol{x}, t) = p^0(t) \tag{3.8}$$

на границе $S_0^1 = S^1 \cap \overline{\Omega^0}$, граничное условие

$$\mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -p^0(t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \tag{3.9}$$

на границе $S_1^1 = S^1 \cap \overline{\Omega}$ и начальные условия

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x}\in Q. \tag{3.10}$$

В (3.1) – (3.10) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0)$ – единичный вектор нормали к границе S^0 (или S_1^1) в точке $\boldsymbol{x}^0 \in S^0$ (или S_1^1),

$$\hat{\varrho} = m\varrho_f + (1-m)\varrho_s, \quad m = \int_Y \chi(y)dy,$$

$\mathfrak{N}_0^s$ – симметричный положительно определенный тензор четвертого порядка, который определяется из решения вспомогательной задачи на элементарной ячейке; задан формулой (3.19).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1,*

$$\mu_0 = 0, \quad 0 < \lambda_0 < \infty, \quad \tau_0 > 0, \quad \mu_1 = \infty,$$

функции $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ являются обобщенным решением задачи (1.6) – (1.16) и $\boldsymbol{w}_s^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_s^\varepsilon}(\boldsymbol{w}^\varepsilon)$ – продолжение (1.29) из области Ω_s^ε в область Ω. Тогда:

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{\varepsilon > 0\}$ такая, что последовательности $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$, $\{\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}$, $\{(1-\zeta)\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\}$, $\{p^{(\varepsilon)}\}$ сходятся слабо в $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ и $L_2(Q_T)$ к функциям $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}$, $(1-\zeta)\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial t^2}$, p соответственно при $\varepsilon \to 0$. Последовательность $\{\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}\}$ сходится слабо в $\boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ к функции $\boldsymbol{w}_s$ при $\varepsilon \to 0$;

2). Предельные функции $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)$, $p(\boldsymbol{x},t)$ удовлетворяют усредненной системе (3.1) – (3.10);

3). Задача (3.1) – (3.10) имеет единственное решение.

С задачей (3.1) – (3.10) свяжем систему уравнений

$$p(\boldsymbol{x},t) = p^0(t) - \varrho_f x_3 \equiv p_0(\boldsymbol{x},t),\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega^0,\ \ t>0, \tag{3.11}$$

$$\nabla\cdot\mathbb{P}_0^{(s)} + \hat{\varrho}\ \boldsymbol{e} = 0,\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega,\ \ t>0, \tag{3.12}$$

дополненную уравнением неразрывности (3.4).

Для системы (3.4), (3.11) – (3.12) вместе с условиями (3.7), (3.9) рассмотрим граничное условие

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}_0^{(s)}(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = -p_0(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0), \;\; \boldsymbol{x} \in S^0. \tag{3.13}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и функции* $\{p^{(n)}, \boldsymbol{w}_s^{(n)}\}$ *являются обобщенным решением задачи (3.1) – (3.9) при* $\tau_0 = \dfrac{1}{n}$. *Тогда:*

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{n > 0\}$ *такая, что последовательность* $\{p^{(n)}\}$ *сходится слабо в* $L_2(Q_T)$ *к функции* $p(\boldsymbol{x},t)$ *и последовательность* $\{\boldsymbol{w}_s^{(n)}\}$ *сходится слабо в* $\boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ *к функции* $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)$ *при* $n \to \infty$;

2). Предельные функции $p(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t)$ *являются решением задачи (3.4), (3.7), (3.9), (3.11) – (3.13);*

3). Задача (3.4), (3.7), (3.9), (3.11) – (3.13) имеет единственное решение.

§3.2. Доказательство теоремы 3.1

Оценки (1.26) обеспечивают ограниченность последовательностей $\{p^{(\varepsilon)}\}$, $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$, $\{\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}$, $\{\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\}$, $\{\mathbb{D}\Big(x, \dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\}$, $\{\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)})\}$ в $L_2(Q_T)$ и $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$. Последовательность $\{(1-\zeta)\nabla \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$ ограничена в $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ согласно леммы 1.1. В силу леммы 1.6 (о продолжении) существует такая функция $\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}$, что $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)} = \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}$ в $\Omega^{(\varepsilon)}$ и последовательность $\{\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}\}$ равномерно по ε ограничена в $\boldsymbol{L}_2(W_2^1(\Omega_T))$. Тогда из последовательности параметров $\{\varepsilon > 0\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_k > 0\}$ такую, что

$$p^{(\varepsilon_k)} \to p \;\text{ слабо в } L_2(Q_T) \;\text{ при } \varepsilon_k \to 0,$$

$$\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon_k)} \to \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t) \;\text{ слабо в } \boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T) \text{ при } \varepsilon_k \to 0,$$

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)} \to \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t), \;\; \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)}}{\partial t} \to \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon_k)}}{\partial t} \to \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t}(\boldsymbol{x},t), \;\; \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)}}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t), \;\; \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon_k)}}{\partial t^2} \to \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}_s}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t)$$

слабо в $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ при $\varepsilon_k \to 0$.

Согласно теоремы Нгуетсенга, леммы 1.4 существуют 1-периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ из $L_2(Q_T\times Y)$ и $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ из $\boldsymbol{L}_2(Q_T;W_2^1(Y))$, что

$$p^{(\varepsilon_k)} \to P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T),$$

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)} \to \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) \text{ двухмасштабно в } \boldsymbol{L}_2(Q_T),$$

$$\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon_k)} \to \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{x},t) \text{ двухмасштабно в } \boldsymbol{L}_2(Q_T),$$

$$\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon_k)}\big) \to \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)+\mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\big) \text{ двухмасштабно в } \boldsymbol{L}_2(Q_T)$$

при $\varepsilon_k \to 0$. Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

Лемма 3.1. *Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей* $\{\chi^{(\varepsilon)}p^{(\varepsilon)}\}$ $\{(1-\chi^{(\varepsilon)})p^{(\varepsilon)}\}$ *удовлетворяют соотношению (3.14)*

$$(1-\zeta)P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = (1-\zeta)(P_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)+\chi(\boldsymbol{y})\,p_f(\boldsymbol{x},t)), \tag{3.14}$$

$$P_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = (1-\chi(\boldsymbol{y}))P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$$

для почти всех $(\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T$ *и* $\boldsymbol{y}\in Y$.

Доказательство. Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ в интегральном тождестве (1.24) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon\, h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)$, где $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ – произвольная однопериодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ функция такая, что $supp\,\boldsymbol{\varphi}_0 \in Y_f$. Таким образом, получим

$$\nabla_y P_f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = 0, \;\; \boldsymbol{y}\in Y_f$$

$$P_f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \chi(\boldsymbol{y})p_f(\boldsymbol{x},t).$$

Последнее доказывает утверждение леммы, если учесть

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = P_f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)+P_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t), \;\; (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T, \;\; \boldsymbol{y}\in Y.$$

$\square$

Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ в интегральном тождестве (1.24) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю при $t=T$ и на границе S^2. Интегральное тождество (1.24) запишем в виде суммы интегралов, используя представление (2.15).

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$I_1^{(\varepsilon)} \to -\int_0^T \int_Q \tau_0\big(\zeta\, \varrho_f + (1-\zeta)(m\varrho_f + (1-m)\varrho_s)\big)\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} d\boldsymbol{x}dt.$$

$$I_2^{(\varepsilon)} \to -\int_0^T \int_{\Omega_0} p\, (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt.$$

$$I_3^{(\varepsilon)} \to \int_0^T \int_\Omega \Big(\lambda_0\, (1-m)\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{U}\big)\rangle_{Y_s}\big) - p\, \mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt.$$

$$I_4^{(\varepsilon)} \to \int_0^T \int_Q \big(\zeta\, \varrho_f + (1-\zeta)(m\varrho_f + (1-m)\varrho_s)\big)\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x}dt.$$

$$I_5^{(\varepsilon)} \to -\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) d\boldsymbol{x}dt.$$

Объединяем полученные слагаемые.

$$\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) d\boldsymbol{x}dt - \int_0^T \int_\Omega \big(\tau_0 \hat{\varrho} \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big) d\boldsymbol{x}dt +$$

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(\lambda_0\big((1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}(x,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\big) - p\, \mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$

$$\int_0^T \int_{\Omega^0} \big(\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} + p\, (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})\big) d\boldsymbol{x}dt. \qquad (3.15)$$

Преобразуем последнее тождество, используя равенство

$$(1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}(x,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s} = \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s),$$

справедливость которого будет доказана ниже.

Таким образом, (3.15) примет вид

$$\int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) d\boldsymbol{x}dt - \int_0^T \int_\Omega \big(\tau_0 \hat{\varrho} \frac{\partial \boldsymbol{w}_s}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big) d\boldsymbol{x}dt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \big(\lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) - p\, \mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega^0} \big(\tau_0 \varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} + p\, (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})\big) d\boldsymbol{x}dt. \qquad (3.16)$$

Интегральное тождество (3.16) включает начальные условия (3.10), динамическое уравнение в (3.1), динамическое уравнение (3.2), условие непрерывности (3.6) на общей границе S^0, граничное условие (3.9) на границе $S^1_1 = S^1 \cap \overline{\Omega}$ и граничное условие (3.8) на границе $S^1_0 = S^1 \cap \overline{\Omega^0}$.

Получим однородные начальные условия (3.10), записав (3.16) в следующем виде:

$$\int_Q \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} + \int_0^T\int_Q \big(\tau_0\tilde{\varrho}\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}\cdot\boldsymbol{\varphi} + A(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)d\boldsymbol{x}dt = 0,$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ – гладкая функция, такая что $supp\,\boldsymbol{\varphi}\subset Q_T$ и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T)=0$ и

$$A(\boldsymbol{x},t) = (1-\zeta)\,\lambda_0\,\nabla\cdot\big(\mathfrak{N}^s_0 : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)\big) + \tilde{\varrho}\,\boldsymbol{e} - \nabla\,p(\boldsymbol{x},t).$$

Для пробной функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)=0$ будем иметь тождество

$$\int_Q \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} = 0,$$

из которого следует начальное условие

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x}\in Q.$$

Аналогично можно получить $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=0$.

Перепишем (3.16) следующим образом

$$\int_0^T\int_{\partial Q}\boldsymbol{\varphi}\,p^0\,\boldsymbol{n}\,d\sigma dt - \int_0^T\int_\Omega\big(\tau_0\hat{\varrho}\frac{\partial\boldsymbol{w}_s}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)d\boldsymbol{x}dt +$$

$$+\int_0^T\int_\Omega\big(\lambda_0\mathfrak{N}^s_0 : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) - p\,\mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= \int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\tau_0\varrho_f\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi} + p\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\big)d\boldsymbol{x}dt.$$

Если в качестве пробной функции выбрать $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ финитную в области Ω^0_T и воспользоваться формулой интегрирования по частям, получим

$$\int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\tau_0\varrho_f\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2} - \varrho_f\,\boldsymbol{e} + \nabla p\,\big)\cdot\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}dt = 0.$$

Последнее обеспечивает уравнение баланса импульса в (3.1).

Аналогично будет получено (3.2) если в качестве пробной функции выбрать $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ такую, что $supp\,\boldsymbol{\varphi}\subset\Omega_T$.

Доказательство условия непрерывности (3.6) повторяет доказательство условия непрерывности (2.11) главы 2. Справедливость граничного условия (3.8) устанавливается аналогично доказательству (2.13) главы 2.

Чтобы получить граничное условие (3.9), перепишем тождество (3.16) в следующем виде:

$$\int_0^T\int_{\partial Q}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)\,p^0(t)\,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x},t)d\sigma dt-\int_0^T\int_{\Omega}\big(\tau_0\hat{\varrho}\frac{\partial\boldsymbol{w}_s}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)d\boldsymbol{x}dt-$$

$$-\int_0^T\int_{\Omega}\nabla\cdot\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)-p\,\mathbb{I}\big)\,\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_0^T\int_{\partial\Omega}\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)-p\,\mathbb{I}\big)\,\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma dt=$$

$$=\int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\tau_0\varrho_f\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}+p\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\big)d\boldsymbol{x}dt.$$

Если $supp\,\boldsymbol{\varphi}\subset Q_T$, то

$$\int_0^T\int_{\Omega}\big(\tau_0\hat{\varrho}\frac{\partial\boldsymbol{w}_s}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega}\nabla\cdot\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)-p\,\mathbb{I}\big)\,\boldsymbol{\varphi}\,d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\tau_0\varrho_f\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}+p\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\big)d\boldsymbol{x}dt=0$$

Пусть теперь $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ финитна на границе $S_1^1=S^1\cap\overline{\Omega}$, тогда имеем

$$\int_0^T\int_{S_1^1}\boldsymbol{\varphi}\,p^0\,\boldsymbol{n}d\sigma dt+\int_0^T\int_{S_1^1}\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)-p\,\mathbb{I}\big)\,\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma dt=0,$$

что в силу произвольности $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ обеспечивает условие (3.9).

Уравнение неразрывности (1.6) для функции $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)$ преобразуется в уравнение неразрывности в форме интегрального тождества

$$\int_0^T\int_Q\nabla\,\xi\cdot\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}d\boldsymbol{x}dt=0,\tag{3.17}$$

справедливого для всякой гладкой функции $\xi(\boldsymbol{x},t)$, равной нулю на части $S^1\times(0,T)$ границы S. Из этого тождества следует уравнение неразрывности в (3.1) и уранение неразрывности (3.4). Условие непрерывности (3.5) на общей границе S^0 следует из (3.17), его доказательство аналогично выводу условия непрерывности (2.12) главы 2. Условие (3.7) выполняется в силу справедливости леммы 1.5.

Перейдем к двухмасштабному пределу при $\varepsilon \to 0$ в (1.24) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon\, h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)$, где $supp\, h(\boldsymbol{x},t) \subset \Omega_T$. Тождество (1.24) запишем, используя представление (2.15). В результате предельного перехода получим единственное ненулевое слагаемое

$$\int_{\Omega_T} h(\boldsymbol{x},t) \int_Y \lambda_0(1-\chi(\boldsymbol{y}))\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{U})\big) : \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\varphi}_0) d\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}dt -$$

$$- \int_{\Omega_T} h(\boldsymbol{x},t) \int_Y (P_s(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + \chi p_f)\nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt,$$

из которого следует уравнение баланса импульса на элементарной ячейке

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\lambda_0\big(\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\big) - (P_s + \chi p_f)\mathbb{I}\Big) = 0$$

в области Y для почти всех $(\boldsymbol{x},t) \in \Omega_T$.

Уравнение неразрывности на элементарной ячейке

$$(1-\chi(\boldsymbol{y}))\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0,\ \boldsymbol{y} \in Y$$

следует из уравнения (1.6), записанного для функции $\boldsymbol{w}_s^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t) \in \Omega$, после двухмасштабного предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ с пробной функцией $\xi = \varepsilon h(\boldsymbol{x},t)\xi_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\xi_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ – гладкая 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ функция.

Функции $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, $P_s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ запишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{U}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}(\boldsymbol{x},t), \quad P_s - p_f = \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{3} P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}(\boldsymbol{x},t),$$

где

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\Big), \quad \boldsymbol{w}_s = (u_1,\, u_2,\, u_3),$$

$$\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) = \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}\,\mathbb{J}^{ij}.$$

Перепишем уравнение баланса импульса следующим образом:

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}) - \frac{1}{\lambda_0}(P_s - p_f)\mathbb{I}\big)\Big) = 0.$$

Далее, имеем

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}\,\mathbb{J}^{ij} + \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{ij}) - \sum_{i,j=1}^{3} P_{\,0}^{(ij)} D_{ij}\mathbb{I}\big)\Big) = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}\,\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\left(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{ij}) + \mathbb{J}^{ij} - P_{\,0}^{(ij)}\mathbb{I}\right)\Big) = 0.$$

Последнее равенство выполняется, когда

$$\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\left(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{ij}) + \mathbb{J}^{ij} - P_{\,0}^{(ij)}\mathbb{I}\right)\Big) = 0.$$

Уравнение неразрывности для функции $\boldsymbol{U}$ примет вид

$$(1-\chi)\,\nabla_y \cdot \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{U}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}) D_{ij}(\boldsymbol{x},t) = 0,$$

$$(1-\chi)\,\sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}(\boldsymbol{x},t)\nabla_y \cdot \boldsymbol{U}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}) = 0,$$

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{U}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}) = 0.$$

Равенство

$$(1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}(x,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s} = \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)$$

есть результат решения вспомогательной задачи на элементарной ячейке Y:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_y \cdot \Big((1-\chi)\big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} - P_0^{(ij)}\mathbb{I}\big)\Big) = 0,\ \boldsymbol{y}\in Y,\\ &(1-\chi)\nabla_y \cdot \boldsymbol{U}_0^{(ij)} = 0,\ \boldsymbol{y}\in Y,\ \langle \boldsymbol{U}_0^{(ij)}\rangle_{Y_s} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Далее, распишем

$$(1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \langle \mathbb{D}(x,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s} =$$

$$= (1-m)\big(\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\big(\mathbb{J}^{ij} : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)\big) =$$

$$= (1-m)\big(\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij}\big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) + \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) =$$

$$= \Big((1-m)\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij}\Big) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s) = \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s),$$

где

$$\mathfrak{N}_0^s = (1-m)\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{ij}\otimes\mathbb{J}^{ij} + \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{(ij)})\rangle_{Y_s}\otimes\mathbb{J}^{ij}. \tag{3.19}$$

Уравнения (3.18) понимаются в смысле теории распределений, то есть как соответствующее интегральное тождество

$$\int_{Y_s} \Big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{(ij)}) + \mathbb{J}^{ij} - P_0^{(ij)}\mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\Phi)d\boldsymbol{y} = 0,$$

справедливое для любой гладкой 1-периодической по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\Phi(\boldsymbol{y})$.

Существование и единственность обобщенного решения $\boldsymbol{U}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}) \in \mathbf{W}_2^1(Y_s)$ задачи (3.18) следует из оценки

$$\int_{Y_s} |\nabla \boldsymbol{U}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})|^2 d\boldsymbol{y} \leq C_0.$$

Последняя, в свою очередь, следует из энергетического тождества

$$\int_{Y_s} \Big(|\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{(ij)})|^2 + \mathbb{J}^{ij} : \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{U}_0^{(ij)})\Big)d\boldsymbol{y} = 0,$$

полученного после умножения первого уравнения в (3.18) на функцию $\boldsymbol{U}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})$, интегрирования по частям в области Y, с учетом уравнения неразрывности в (3.18).

Симметричность тензора $\mathfrak{N}_0^s$ следуют из тождеств

$$\int_{Y_s} \big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{(ij)}) : \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{(kl)}) + \mathbb{J}^{ij} : \mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{(kl)})\big)dy = 0, \tag{3.20}$$

которые, являются результатом умножения уравнений (3.18) для функций $\boldsymbol{U}_0^{(ij)}$ на $\mathbb{D}(y,\boldsymbol{U}_0^{(kl)})$ и интегрирования по частям по Y.

Лемма 3.2. *Постоянный тензор четвертого ранга $\mathfrak{N}_0^s$ симметричен и строго положительно определен.*

Доказательство. Пусть $\zeta = (\zeta_{ij})$, $\eta = (\eta_{ij})$ произвольные симметричные матрицы и

$$\boldsymbol{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{U}_0^{(ij)}\zeta_{ij}, \quad \boldsymbol{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{U}_0^{(ij)}\eta_{ij}.$$

Тогда, интегральное тождество (3.20) примет вид

$$\Big(\langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta):\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}+\langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)\rangle_{Y_s}:\zeta\Big)=0.$$

По определению тензора $\mathfrak{N}_0^s$

$$\big(\mathfrak{N}_0^s:\zeta\big):\eta=(1-m)\zeta:\eta+\langle \mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta)\rangle_{Y_s}:\eta.$$

Последние два соотношения приводят к равенству

$$\big(\mathfrak{N}_0^s:\zeta\big):\eta=\langle\Big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\zeta)+\zeta\Big):\Big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Y}_\eta)+\eta\Big)\rangle_{Y_s},$$

из которого следует симметричность и положительная определенность тензора $\mathfrak{N}_0^s$. $\square$

Единственность решения усредненной задачи (3.1) – (3.10) доказывается аналогично доказательству, приведенному в лемме 2.3.

§3.3. Доказательство теоремы 3.2

Заметим, что оценки (1.26) справедливы для функций $p^{(n)}$ и $\boldsymbol{w}_s^{(n)}$. Тогда из (1.26) и (3.1) следует, что $\nabla p^n\in \boldsymbol{L}(\Omega_T^0)$ и имеют место следующие оценки:

$$\max_{0\leq t\leq T}\int_Q\Big(\frac{1}{n^2}\zeta|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t^2}|^2+\frac{1}{n^2}(1-\zeta)|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t^2}|^2\Big)d\boldsymbol{x}+$$
$$+\max_{0\leq t\leq T}\int_Q\Big(\frac{1}{n}\zeta|\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t}|^2+\frac{1}{n}(1-\zeta)|\frac{\partial\boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t}|^2+\lambda_0(1-\zeta)|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s^{(n)})|^2\Big)d\boldsymbol{x}+$$
$$+\int_0^T\int_Q\Big(|p^{(n)}|^2+\zeta\,|\nabla p^{(n)}|^2\Big)d\boldsymbol{x}dt\leqslant C_0. \tag{3.21}$$

Интегральное тождество (3.16) обретает вид

$$\int_0^T\int_Q\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)d\boldsymbol{x}dt-\int_0^T\int_\Omega\big(\frac{1}{n}\hat{\varrho}\frac{\partial\boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)d\boldsymbol{x}dt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s^{(n)})-p^{(n)}\,\mathbb{I}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x}dt=$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega^0} \big(\frac{1}{n}\varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} + p^{(n)}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})\big) d\boldsymbol{x} dt. \tag{3.22}$$

Последнее тождество содержит краевое условие

$$p^{(n)}(\boldsymbol{x}, t) = p^0(t),\ \ \boldsymbol{x} \in S_0^1,\ t > 0 \tag{3.23}$$

Из оценок (3.21) заключаем, что существует последовательность параметра $\{n\}$, из которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{n_k\}$ такую, что

$$\frac{1}{n_k}\hat{\varrho}\frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(n_k)}}{\partial t} \to 0 \ \text{ сильно } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big),$$

$$\frac{1}{n_k}\varrho_f\frac{\partial \boldsymbol{w}^{(n_k)}}{\partial t} \to 0 \ \text{ сильно } L_2\big((0,T); L_2(\Omega^0)\big),$$

$$\nabla\, p^{(n_k)} \rightharpoonup \nabla\, p_0,\ \ p^{(n_k)} \rightharpoonup p_0 \ \text{ слабо } L_2\big((0,T); L_2(\Omega^0)\big),$$

и

$$p^{(n_k)} \rightharpoonup p,\ \ \boldsymbol{w}_s^{(n_k)} \rightharpoonup \boldsymbol{w}_s,\ \ \nabla\, \boldsymbol{w}_s^{(n_k)} \to \nabla\, \boldsymbol{w}_s \ \text{ слабо } L_2\big((0,T); L_2(\Omega)\big)$$

при $n_k \to \infty$. Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

Перейдем к пределу в равенстве (3.22) при $n \to \infty$, предварительно записав его в виде

$$I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)} = I_4^{(n)},$$

где

$$I_1^{(n)} = \int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) d\boldsymbol{x} dt,\ \ I_2^{(n)} = -\int_0^T \int_\Omega \big(\frac{1}{n}\hat{\varrho}\frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big) d\boldsymbol{x} dt$$

$$I_3^{(n)} = \int_0^T \int_\Omega \big(\lambda_0 \mathfrak{N}_0^s : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_s^{(n)}) - p^{(n)}\, \mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} dt$$

$$I_4^{(n)} = \int_0^T \int_{\Omega^0} \big(\frac{1}{n}\varrho_f \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \varrho_f\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} + p^{(n)}\,(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})\big) d\boldsymbol{x} dt.$$

Тогда при $n \to \infty$ интеграл $I_1^{(n)}$ не меняет своего вида.

Интеграл $I_2^{(n)}$:

$$\int_0^T \int_\Omega \big(\frac{1}{n}\hat{\varrho}\frac{\partial \boldsymbol{w}_s^{(n)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi}\big) d\boldsymbol{x} dt \to \int_0^T \int_\Omega \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} dt,$$

Интеграл $I_3^{(n)}$:

$$\int_0^T\int_\Omega\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s^{(n)})-p^{(n)}\,\mathbb{I}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x}dt\to$$
$$\to\int_0^T\int_\Omega\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)-p\,\mathbb{I}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x}dt,$$

Интеграл $I_4^{(n)}$:

$$\int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\frac{1}{n}\varrho_f\frac{\partial\boldsymbol{w}^{(n)}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}+p^{(n)}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\big)d\boldsymbol{x}dt\to$$
$$\to\int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}+p_0\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\big)d\boldsymbol{x}dt.$$

Объединим полученные слагаемые:

$$\int_0^T\int_Q\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)d\boldsymbol{x}dt-\int_0^T\int_{\Omega^0}\big(\varrho_f\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}+p_0\,(\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi})\big)d\boldsymbol{x}dt+$$
$$+\int_0^T\int_\Omega\Big(\big(\lambda_0\mathfrak{N}_0^s:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_s)-p\,\mathbb{I}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})-\hat{\varrho}\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)d\boldsymbol{x}dt=0. \qquad (3.24)$$

Тождество (3.24) содержит условие (3.9) на границе $S_1^1=S^1\cap\overline{\Omega}$, равенство (3.11) в области Ω^0, динамическое уравнение (3.12) в области Ω, граничное условие (3.13) на общей границе S^0.

Уравнение баланса импульса (3.12) следует из (3.26), записанного для пробной функции $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ финитной в области Ω_T.

Доказательство (3.9) повторяет доказательство в §3.2.

Благодаря сильной сходимости последовательности $\{\frac{1}{n}\frac{\partial\boldsymbol{w}^n}{\partial t}\}$ к нулю в $L_2(\Omega_T^0)$ функция $p(\boldsymbol{x},t)$ удовлетворяет в области Ω^0 первому уравнению в (4.1), которое примет вид

$$\nabla p=\varrho_f\,\boldsymbol{e}.$$

Последнее приводит к равенству (3.11) и граничному условию (3.13). Уравнение неразрывности (1.6) для перемещения $\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)$ преобразуется в уравнение неразрывности в форме интегрального тождества

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla\,\xi\cdot\boldsymbol{w}^{(n)}d\boldsymbol{x}dt=0$$

для любой гладкой функции $\xi(\boldsymbol{x}, t)$ финитной в области $\Omega \times (0;T)$, равной нулю на $S^1 \times (0,T)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем тождестве, применяя формулу интегрирования по частям, и реинтегрируя по переменным $\boldsymbol{x}$, t, получим

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}_s = 0$$

уравнение неразрывности (3.4). Наконец, функция $\boldsymbol{w}_s$ исчезает на границе S^2 в силу леммы 1.5.

Доказательство единственности задачи (3.4), (3.7), (3.9), (3.11) - (3.13) аналогично доказательству, приведенному в лемме 2.3.

§3.4. Выводы

В настоящей главе получены усредненные системы линейных дифференциальных уравнений для случая фильтрации слабо вязкой жидкости в упругую твердую пористую среду: $\mu_0 = 0$, $0 < \lambda_0 < \infty$, $\mu_1 = \infty$. Для вывода усредненных уравнений используется метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга.

В качестве усредненной, рассмотрена начально-краевая задача (3.1) – (3.10). На основе анализа параметров системы уравнений математической модели $\mathbf{M}_1$ установлена сходимость ее решения к решению задачи (3.1) – (3.10) при стремлении малого параметра к нулю при фиксированном $\tau_0 > 0$. Установлено также, что при $\tau_0 \to 0$ усредненная задача (3.1) – (3.10) приводится к системе (2.6), (2.8), (2.11) – (2.13). При этом решение упомянутых начально-краевых задач единственно.

Глава 4.

Математическая модель фильтрации вязкой жидкости в упругом скелете грунта

В настоящей главе выводятся усредненные системы линейных дифференциальных уравнений для случая фильтрации вязкой жидкости в поровом пространстве с упругим скелетом грунта [69].

§4.1. Основные результаты

Под усредненной будем понимать систему, полученную в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в уравнениях модели $\mathbf{M}_2$. Эта система будет определяться следующими уравнениями:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \Big(\mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\,\mathbb{I}\Big) + \varrho_f\,\boldsymbol{e} = 0 \tag{4.2}$$

в области Ω^0 при $t > 0$, уравнением неразрывности (4.1) и усредненным уравнением баланса импульса

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbb{P}} + \hat{\varrho}\,\boldsymbol{e} = 0, \tag{4.3}$$

где

$$\widehat{\mathbb{P}} = -p\,\mathbb{I} + \mathfrak{N}_1 : \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \mathfrak{N}_2 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{N}_3(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau))d\tau \tag{4.4}$$

в области Ω при $t > 0$.

Для системы (4.1) – (4.4) выполнены условия непрерывности нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \Big(\mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)\Big) - p(\boldsymbol{x}, t)\,\mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^0) \tag{4.5}$$

на общей границе S^0, условия Неймана

$$\Big(\mu_0\,\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)\Big) - p(\boldsymbol{x}, t)\,\mathbb{I}\Big) \cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x} \in S^1_0 = S^1 \cap \overline{\Omega^0}; \tag{4.6}$$

$$\widehat{\mathbb{P}} \cdot \boldsymbol{n} = -p^{\,0}(\boldsymbol{x},t)\cdot \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x}\in S^1_1 = S^1 \cap \overline{\Omega}, \tag{4.7}$$

условие Дирихле

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{4.8}$$

на части S^2 внешней границы S и начальное условие

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega. \tag{4.9}$$

В (4.3)

$$\hat{\varrho} = m\varrho_f + (1-m)\varrho_s,\ \ m = \int_Y \chi(\boldsymbol{y})dy.$$

Тензоры 4 ранга $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3(t)$ вычисляются по формулам (4.20); симметричный тензор $\mathfrak{N}_1$ является положительно определенным.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2,*

$$\alpha_\mu = \mu_0,\ 0<\mu_0<\infty,\ 0<\lambda_0<\infty,$$

функции $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)},\, p^{\,(\varepsilon)}\}$ являются обобщенным решением задачи (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23) . Тогда:

1). Существует подпоследовательность, выделенная из последовательности параметров $\{\varepsilon>0\}$ такая, что последовательность $\{p^{(\varepsilon)}\}$ сходится слабо в $L_2\big(Q_T\big)$ к функции $p(\boldsymbol{x},t)$, а последовательность $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$ сходится слабо в $\boldsymbol{W}^{1,0}_2\big(Q_T\big)$ к функции $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$ при $\varepsilon\to 0$;

2). Предельные функции $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$, $p(\boldsymbol{x},t)$ являются решением усредненной системы (4.1) – (4.9);

3). Задача (4.1) – (4.9) имеет единственное решение.

§4.2. Доказательство теоремы 4.1

Пусть $\boldsymbol{v}^{(\varepsilon)} = \mathbb{E}_{\Omega^{(\varepsilon)}_f}\Big(\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)$ – продолжение (1.29) функции $\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}$ из $\Omega^{(\varepsilon)}_f$ в Ω.

Оценки (1.28) обеспечивают ограниченность последовательностей $\{p^{(\varepsilon)}\}$, $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\}$, $\{\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\}$, $\{\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t^2}\}$, $\{\mathbb{D}\Big(x,\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\}$, $\{\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)})\}$ в $L_2(Q_T)$ и $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$. Следовательно, из последовательности параметров $\{\varepsilon>0\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_k>0\}$ такую, что

$$p^{(\varepsilon_k)} \rightharpoonup p(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } \ L_2(Q_T),$$

$$\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)} \rightharpoonup \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) \text{ слабо в } \ \boldsymbol{W}_2^{1,0}(Q_T)$$

при $\varepsilon_k \to 0$.

Согласно теоремы Нгуетсенга существуют 1-периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ такие, что

$$p^{\varepsilon_k} \to P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \text{ двухмасштабно в } L_2(Q_T\times Y),$$

$$\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}\big) \to \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \mathbb{D}\big(y,\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\big) \text{ двухмасштабно в } \boldsymbol{L}_2(Q_T\times Y),$$

$$\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}^{\varepsilon_k}\big) \to \mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big) \text{ двухмасштабно в } \boldsymbol{L}_2(Q_T\times Y)$$

при $\varepsilon_k \to 0$.

Учитывая ограниченность последовательностей $\{\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)})\}$ и $\{\mathbb{D}\Big(x,\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big)\}$ в $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ и утверждения леммы 1.4, заключаем, что последовательности $\{\boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)}\}$, $\{\dfrac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon_k)}}{\partial t}\}$ сходятся двухмасштабно к своим слабым пределам $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$ и $\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}$ соответственно. Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

Лемма 4.1. *Для почти всех* $(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \in \Omega_T\times Y_f$

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,\ \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \int_0^t \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\tau)d\tau$$

или

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t).$$

Доказательство. Для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$

$$\chi^{(\varepsilon)}\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t \chi^{(\varepsilon)}\boldsymbol{v}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau.$$

Тогда,

$$\int_{\Omega_T} \psi(t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\varphi_1\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\chi\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)d\boldsymbol{x}dt =$$

$$\int_{\Omega_T} \Big(\int_t^T \psi(\tau)d\tau\Big)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x},t)\varphi_1\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\chi\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)d\boldsymbol{x}dt$$

для гладких, 1-периодических по переменной $\boldsymbol{y}$ функций $\psi(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x})$ и $\varphi_1(\boldsymbol{y})$. Переходя к двухмасштабному пределу при $\varepsilon \to 0$ и реинтегрируя полученное тождество, имеем

$$0 = \int_{\Omega_T} \Big(\big(\int_t^T \psi(\tau) d\tau \big) \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) - \psi(t) \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) \Big) d\boldsymbol{x} dt =$$
$$\int_{\Omega_T} \psi(t) \big(\int_0^t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) \big) d\boldsymbol{x} dt,$$

что доказывает утверждение леммы для функций $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$.

Доказательство утверждения леммы для функции $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ аналогично. □

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (1.27) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$. Для этого представим (1.27) в виде суммы интегралов:

$$I_1^{(\varepsilon)} + I_2^{(\varepsilon)} + I_3^{(\varepsilon)} + I_4^{(\varepsilon)} = 0,$$

где

$$I_1^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \zeta \mathbb{P}_f : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} dt, \quad I_2^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} (1 - \zeta) \mathbb{P} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} dt,$$

$$I_3^{(\varepsilon)} = - \int_{Q_T} \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} dt, \quad I_4^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} p^0) d\boldsymbol{x} dt.$$

Тогда, при $\varepsilon \to 0$

$$I_1^{(\varepsilon)} \to \int_0^T \int_Q \Big(\mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - p\, \mathbb{I} \Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} dt.$$

$$I_2^{(\varepsilon)} \to \int_0^T \int_Q (1 - \zeta) \Big(m\, \big(\mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \langle \mathbb{D}\big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\big) \rangle_{Y_f} \big) +$$
$$+ \big(\lambda_0\, (1 - m) \big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}\big) \rangle_{Y_s} \big) - p\, \mathbb{I} \Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} dt.$$

$$I_3^{(\varepsilon)} \to - \int_0^T \int_Q \big(\zeta\, \varrho_f + (1 - \zeta)(m \varrho_f + (1 - m) \varrho_s) \big) \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} dt.$$

$$I_4^{(\varepsilon)} \to \int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi} p^0) d\boldsymbol{x} dt.$$

После предельного перехода получим следующее:

$$\int_{Q_T}\Big(\zeta\big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-p\,\mathbb{I}\big)+(1-\zeta)\Big(\mu_0\,(m\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)+\langle\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\rangle_{Y_f})+$$

$$+\lambda_0\big((1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\rangle_{Y_s}\big)-p\,\mathbb{I}\big)\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_{Q_T}\big(\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p^0)-(\zeta\varrho_f+(1-\zeta)\hat{\varrho})\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\big)d\boldsymbol{x}dt=0. \qquad (4.10)$$

Введем обозначение, пусть

$$\widehat{\mathbb{P}}\;=\;\mu_0\,(m\,\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)\;+\;\langle\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\rangle_{Y_f})\;+\;\lambda_0\big(\,(1\;-\;m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+$$

$$+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\rangle_{Y_s}\big)-p\,\mathbb{I}. \qquad (4.11)$$

Тогда тождество (4.10) примет вид

$$\int_{Q_T}\Big(\big(\zeta\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-p\,\mathbb{I}\big)+(1-\zeta)\widehat{\mathbb{P}}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})+\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}p^0)-$$

$$-(\zeta\varrho_f+(1-\zeta)\hat{\varrho})\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}\Big)d\boldsymbol{x}dt=0.$$

Можно показать, что интегральное тождество (4.10) содержит усредненное уравнение баланса импульса (4.2), (4.3) условие непрерывности (4.5), граничные условия (4.6) и (4.7).

Интегральное тождество (4.10), записанное для пробной функции $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ финитной в области Ω_T^0, доставляет соотношение

$$\int_{\Omega_T^0}\nabla\cdot\big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-p\,\mathbb{I}\big)d\boldsymbol{x}dt=-\int_{\Omega_T^0}\varrho_f\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}dt,$$

из которого следует предельное уравнение баланса импульса (4.2).

Перепишем тождество (4.10) в следующем виде:

$$-\int_{\Omega_T^0}\nabla\cdot\big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-p\,\mathbb{I}\big)\,\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}dt+\int_{\partial\Omega_T^0}\big(\mu_0\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)-p\,\mathbb{I}\big)\,\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{n}d\sigma dt+$$

$$+\int_{\Omega_T}\Big(\mu_0\,\Big(m\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)+\langle\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\rangle_{Y_f}\Big)+\lambda_0\Big((1-m)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})+$$

$$+\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\rangle_{Y_s}\Big)-p\,\mathbb{I}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})d\boldsymbol{x}dt+$$

$$+\int_{\partial Q_T} p^0 \boldsymbol{\varphi}\, \boldsymbol{n} d\sigma dt - \int_{Q_T} (\zeta \varrho_f + (1-\zeta)\hat{\varrho}) \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} dt = 0.$$

Граничное условие (4.6) следует из последнего равенства, записанного для пробной функции $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$, финитной на части $S^1_0 = S^1 \cap \overline{\Omega^0}$ границы S^1.

Аналогичным образом будет получено граничное условие (4.7) на части $S^1_1 = S^1 \cap \overline{\Omega}$ границы S^1.

Проведя рассуждения аналогичные тем, что были проделаны при доказательстве граничного условия (2.11) главы 2, установим справедливость граничного условия (4.5).

Уравнение неразрывности (1.6) после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ финитной в области Q_T примет вид:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0.$$

Граничное условие (4.8) следует из интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} (\boldsymbol{w}^{(\varepsilon)} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \nabla \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)} \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x} dt = 0,$$

записанного для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$, обращающейся в нуль на границе S^0, после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Начальное условие (4.9) следует из интегрального тождества

$$\int_{\Omega_T} m \Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \Big) d\boldsymbol{x} dt = 0$$

справедливого для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ равной нулю при $t = T$. Последнее является результатом перехода к двухмасштабному пределу при $\varepsilon \to 0$ в тождестве

$$\int_{\Omega_T} \chi^{(\varepsilon)} \Big(\boldsymbol{v}^{(\varepsilon)} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \Big) d\boldsymbol{x} dt = 0.$$

Макроскопическое уравнение баланса импульса

$$\nabla \cdot \Big(\mu_0 \left(m \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \langle \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big) \rangle_{Y_f} \right) + \lambda_0 \big((1-m) \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \\ + \langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}) \rangle_{Y_s} \big) - p\, \mathbb{I} \Big) + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} = 0. \qquad (4.12)$$

следует из тождества (4.10), переписанного для финитной в области Ω_T функции $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$.

Перейдем к двухмасштабному пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве (1.27) с пробной функцией $\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon h(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)$, где $h(\boldsymbol{x}, t)$ финитна в области Ω_T. Тогда, при $\varepsilon \to 0$

$$I_1^{(\varepsilon)} = \int_{Q_T} \zeta \mathbb{P}_f : \mathbb{D}\Big(x, \varepsilon\, h(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\Big) dxdt \to 0.$$

Рассмотрим интеграл $I_2^{(\varepsilon)}$:

$$\int_{Q_T} (1-\zeta)\mathbb{P} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$

$$\int_{\Omega_T} \Big(\chi^{(\varepsilon)}\alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) + (1-\chi^{(\varepsilon)})\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}) - p^{(\varepsilon)}\mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= \int_{\Omega_T} \chi^{(\varepsilon)}\alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}}{\partial t}\Big) : \Big(\frac{\varepsilon}{2}(\nabla h \otimes \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 \otimes \nabla h) + h \cdot \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}_0)\Big) d\boldsymbol{x}dt +$$

$$+ \int_{\Omega_T} (1-\chi^{(\varepsilon)})\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}) : \Big(\frac{\varepsilon}{2}(\nabla h \otimes \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 \otimes \nabla h) + h \cdot \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}_0)\Big) d\boldsymbol{x}dt -$$

$$- \int_{\Omega_T} p^{(\varepsilon)} \left(\varepsilon \nabla h \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 + h\, \nabla_y \cdot \boldsymbol{\varphi}_0\right) d\boldsymbol{x}dt \to$$

$$\to \int_{\Omega_T} h(\boldsymbol{x}, t) \int_Y \mu_0 \chi(\boldsymbol{y}) \Big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}_0) d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y} +$$

$$+ \int_{\Omega_T} h(\boldsymbol{x}, t) \int_Y \lambda_0 (1-\chi(\boldsymbol{y}))\big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}\big)\big) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}_0) d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y} -$$

$$- \int_{\Omega_T} h(\boldsymbol{x}, t) \int_Y P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.$$

$$I_3^{(\varepsilon)} = -\int_0^T \int_Q \tilde{\varrho}^{\varepsilon} \boldsymbol{e} \cdot \varepsilon\, h(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) d\boldsymbol{x}dt \to 0,$$

Применяя формулу Гаусса–Остроградского ([32, с.22]) к интегралу I_4, получим

$$I_4^{(\varepsilon)} = \int_0^T \int_Q \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p^0) d\boldsymbol{x}dt = \int_0^T \int_{\partial Q} p^0(\boldsymbol{x}, t)\, \varepsilon\, h(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\varphi}_0\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\, \boldsymbol{n}\, d\sigma dt \to 0.$$

Таким образом, в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ получим:

$$\int_{\Omega_T} h(\boldsymbol{x},t) \int_Y \Big(\mu_0\, \chi(\boldsymbol{y}) \Big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}) + \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big) +$$

$$+ \lambda_0\,(1-\chi(\boldsymbol{y}))\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\big) -$$

$$- P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\,\mathbb{I}\Big) : \mathbb{D}(y,\boldsymbol{\varphi}_0)\, d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y} = 0.$$

Реинтегрируя полученное равенство по переменным $\boldsymbol{x}$, t, а за тем по $\boldsymbol{y}$, получаем уравнение баланса импульса на элементарной ячейке

$$\nabla_y \cdot \Big(\mu_0\, \chi \Big(\mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)\Big) +$$

$$+ \lambda_0\,(1-\chi)\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) + \mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})\big) - P\,\mathbb{I}\Big) = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\nabla_y \cdot \Big(\chi\Big(\mu_0\, \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big) + \mathbb{Z}\Big) + \lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}) - P\,\mathbb{I}\Big) = 0, \qquad (4.13)$$

где

$$\mathbb{Z}(\boldsymbol{x},t) = \mu_0 \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) - \lambda_0 \mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{3} Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)\mathbb{J}^{(ij)}.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в уравнении неразрывности (1.6), записанном в интегральной форме

$$\int_{\Omega_T} \nabla \cdot \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\, \xi\, d\boldsymbol{x}dt = 0$$

с пробной функцией $\xi\Big(\boldsymbol{x}, t, \dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) = \varepsilon h\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) h_0(\boldsymbol{x},t)$, где $h\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)$ – гладкая 1-периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ функция, $h_0(\boldsymbol{x},t)$ – гладкая финитная в Ω_T функция. Имеем

$$\int_{\Omega_T} \nabla \cdot \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)}\, \varepsilon h\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) h_0(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}dt =$$

$$-\int_{\Omega_T} \boldsymbol{w}^{(\varepsilon)} \Big(\nabla_{\boldsymbol{y}} h\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big) h_0(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon \nabla h_0(\boldsymbol{x},t) h\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\Big) d\boldsymbol{x}dt \to$$

$$\to -\int_{\Omega_T}\int_Y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\, \nabla_{\boldsymbol{y}} h(\boldsymbol{y}) h_0(\boldsymbol{x},t) d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt = 0.$$

Применяя к последнему выражению формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_{\Omega_T}\int_Y \nabla_{\boldsymbol{y}}\cdot \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\,h(\boldsymbol{y})h_0(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt=0.$$

Заметим, что интеграл по границе ∂Y исчезает в силу периодичности функции $h\Big(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)$. И, учитывая произвольный выбор функций $h_0(\boldsymbol{x},t)$, $h(\boldsymbol{y})$, окончательно получаем

$$\nabla_y\cdot\boldsymbol{W}=0,\ \ \boldsymbol{y}\in Y \tag{4.14}$$

уравнение неразрывности.

Решение $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ периодической задачи (4.13), (4.14) в области Y_T будем искать в виде:

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\sum_{i,j=1}^3\int_0^t \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,$$

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\chi(\boldsymbol{y})\sum_{i,j=1}^3 P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)+\sum_{i,j=1}^3\int_0^t P^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau$$

В таком случае уравнение (4.13) приобретает вид:

$$\begin{aligned}\nabla_y\cdot\ \Big(\chi\,\mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,j=1}^3\int_0^t \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\Big)+\\ +\chi\sum_{i,j=1}^3(\boldsymbol{x},t)\mathbb{J}^{(ij)}Z_{ij}+\lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}\Big(y,\sum_{i,j=1}^3\int_0^t \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\Big)-\\ -\chi\sum_{i,j=1}^3 P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}-\sum_{i,j=1}^3\int_0^t P^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\,\mathbb{I}\Big)=0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^3\nabla_y\cdot\ \Big(\chi\,\mu_0\int_0^t\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)\Big)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau+\\ +\chi\,\mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}+\chi\,(\boldsymbol{x},t)\mathbb{J}^{(ij)}Z_{ij}(\boldsymbol{y},0)\Big)Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)+\\ +\lambda_0\,(1-\chi)\int_0^t\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau))Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau-\chi\,P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})Z_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{I}-\\ -\int_0^t P^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\,\mathbb{I}\Big)=0.\end{aligned}$$

Уравнение неразрывности (4.14), в свою очередь, запишется следующим образом

$$\sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t \nabla_y\cdot\,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau)Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau=0.$$

Последние равенства будут выполняться для функций $\{\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t),\ P^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\}$, $\{\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}),\ P_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\}$ $i,j=1,2,3$, которые являются решением следующих периодических задач

$$\left.\begin{aligned}\nabla_y\cdot\,\Big(\chi\,\mu_0\,\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}\Big)+\\ \lambda_0\,(1-\chi)\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)})-P^{(ij)}\,\mathbb{I}\Big)=0,\\ \nabla_y\cdot\,\boldsymbol{W}^{(ij)}=0,\\ \chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y}),\end{aligned}\right\}\tag{4.15}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla_y\cdot\,\Big(\chi\left(\mu_0\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)})+\mathbb{J}^{(ij)}-P_0^{(ij)}\,\mathbb{I}\right)\Big)=0,\\ \nabla_y\cdot\,\boldsymbol{W}_0^{(ij)}=0,\ \int_Y\chi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})dy=0,\end{aligned}\right\}\tag{4.16}$$

в области Y. Следует заметить, что решения задач (4.15), (4.16) определены с точностью до вектор-функции времени, поэтому потребуем, чтобы среднее по элементарной ячейке от решения было равно нулю.

Найдем $\mathbb{D}\Big(y,\dfrac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)$ и $\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})$ как операторы на $\mathbb{D}\Big(x,\dfrac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big)$ и $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})$.

$$\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W})=\sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau))Z_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau=$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t\left(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau))\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\right):\mathbb{Z}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau=$$

$$\Big(\mu_0\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}_0^{(ij)})\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w})-\sum_{i,j=1}^{3}\int_0^t\Big(\big(\lambda_0\,\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t-\tau))+$$

$$\mu_0\,\mathbb{D}(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial\tau}(\boldsymbol{y},t-\tau))\big)\otimes\mathbb{J}^{(ij)}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},\tau))d\tau.$$

Используя соотношение $\dfrac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial \tau}(\boldsymbol{y}, t-\tau) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t-\tau)$, получим

$$\mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}) = \mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y}, t-\tau) : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)\big) d\tau, \tag{4.17}$$

где

$$\mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) = \mu_0 \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big) \otimes \mathbb{J}^{(ij)} \tag{4.18}$$

и

$$\mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y}, t) = \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\mu_0\, \mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t)\Big) - \lambda_0\, \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y}, t)\big)\Big) \otimes \mathbb{J}^{(ij)}. \tag{4.19}$$

Учитывая (4.17) – (4.18), имеем

$$\mathbb{D}\Big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big) = \mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) : \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t)\Big) + \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y}, 0) : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)\big) +$$
$$\int_0^t \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t-\tau) : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)\big) d\tau.$$

Подставим найденные выражения для операторов $\mathbb{D}\Big(y, \dfrac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\Big)$ и $\mathbb{D}(y, \boldsymbol{W})$ в макроскопическое уравнение баланса импульса (4.12), получим

$$\nabla \cdot \Big(\mu_0 \big(m \sum_{i,j=1}^{3} \big(\mathbb{J}^{(ij)} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) + \langle \mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_f} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}) +$$
$$+ \langle \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y}, 0) \rangle_{Y_f} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \int_0^t \langle \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y}, t-\tau) \rangle_{Y_f} : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)\big)\, d\tau\big) +$$
$$\lambda_0 \big((1-m) \sum_{i,j=1}^{3} \big(\mathbb{J}^{(ij)} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) + \langle \mathfrak{A}_0(\boldsymbol{y}) \rangle_{Y_s} : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) +$$
$$+ \int_0^t \langle \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y}, t-\tau) \rangle_{Y_s} : \mathbb{D}\big(x, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, \tau)\big)\, d\tau\big) - p\, \mathbb{I}\Big) + \hat{\varrho}\, \boldsymbol{e} = 0.$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \mu_0\, m \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{(ij)} \otimes \mathbb{J}^{(ij)} + \mu_0\, \langle \mathfrak{A}_0 \rangle_{Y_f}, \\ \mathfrak{N}_2 &= \lambda_0\, (1-m) \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{(ij)} \otimes \mathbb{J}^{(ij)} + \lambda_0\, \langle \mathfrak{A}_0 \rangle_{Y_s} + \\ &\qquad + \mu_0\, \langle \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},0) \rangle_{Y_f} \\ \mathfrak{N}_3(t) &= \mu_0\, \langle \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial t}(\boldsymbol{y},t) \rangle_{Y_f} + \lambda_0\, \langle \mathfrak{A}_1(\boldsymbol{y},t) \rangle_{Y_s}. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Лемма 4.2. *Задачи (4.15), (4.16) однозначно разрешимы.*

Доказательство. Разрешимость задач (4.15), (4.16) и бесконечная гладкость решения по времени следует из оценки

$$\max_{0<t<T} \int_{Y_f} |\mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\big)|^2 d\boldsymbol{y} + \int_0^T \int_{Y_s} |\mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\big)|^2 d\boldsymbol{y} dt \leqslant C_0. \tag{4.21}$$

Оценка (4.21) является следствием энергетических тождеств

$$\frac{1}{2} \int_Y \chi\, \mu_0\, |\mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},t)\big)|^2 d\boldsymbol{y} + \\ + \int_0^t \int_Y (1-\chi)\lambda_0\, |\mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}\big(\boldsymbol{y},\tau)\big)|^2 d\boldsymbol{y} d\tau = \\ = \frac{1}{2} \int_Y \chi\, \mu_0\, |\mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)|^2 d\boldsymbol{y}, \tag{4.22}$$

$$\int_Y \chi\, \mu_0\, |\mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)|^2 d\boldsymbol{y} + \int_Y \chi \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big) : \mathbb{J}^{(ij)} d\boldsymbol{y} = 0, \tag{4.23}$$

полученных путем умножения первого уравнения в (4.15) на функцию $\boldsymbol{W}^{(ij)}$ и применения формулы интегрирования по частям в области $Y \times (0,t)$, и умножения первого уравнения в (4.16) на функцию $\boldsymbol{W}_0^{(ij)}$ и применения формулы интегрирования по частям в области Y.

Учитывая, что вектор-функция $(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},0)$ является периодическим решением системы Стокса

$$\nabla_y \cdot \big(\lambda_0\, \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}) - P^{(ij)}\, \mathbb{I}\big) = 0,\ \nabla_y \cdot \boldsymbol{W}^{(ij)} = 0$$

в области Y_s, совпадающим на границе γ с вектор–функцией

$$\chi(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},0) \in W_2^1(Y_s),$$

получаем (см. [30], с. 55)

$$\int_{Y_s} |\mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}^{(ij)}(\boldsymbol{y},0)\big)|^2 d\boldsymbol{y} \leqslant C_0.$$

Из этой оценки и уравнения (4.14) при $t=0$ имеем

$$\int_{Y_f} |\mathbb{D}\big(y, \frac{\partial \boldsymbol{W}^{(ij)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0)\big)|^2 d\boldsymbol{y} \leqslant C_0.$$

Повторяя эту процедуру, мы получим требуемое. $\square$

Лемма 4.3. *Симметричный тензор $\mathfrak{N}_1$ строго положительно определен.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные симметричные матрицы $\zeta = (\zeta_{ij})$ и $\eta = (\eta_{ij})$. Пусть

$$\boldsymbol{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{W}_0^{(ij)} \zeta_{ij}, \quad \boldsymbol{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{W}_0^{(ij)} \eta_{ij}.$$

Как было показано ранее

$$\mathfrak{N}_1 = \mu_0\, m \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{(ij)} \otimes \mathbb{J}^{(ij)} + \mu_0^2 \sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)\rangle_{Y_f} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}.$$

Тогда

$$\big(\mathfrak{N}_1 : \zeta\big) : \eta = \mu_0\, m \left(\Big(\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{(ij)} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \zeta\right) : \eta +$$

$$+\mu_0^2 \left(\Big(\sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)\rangle_{Y_f} \otimes \mathbb{J}^{(ij)}\Big) : \zeta\right) : \eta =$$

$$= \mu_0\, m \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{J}^{(ij)} \zeta_{ij}\Big) : \eta + \mu_0^2 \Big(\sum_{i,j=1}^{3} \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\big)\rangle_{Y_f} \zeta_{ij}\Big) : \eta =$$

$$= \mu_0\, m \sum_{i,j=1}^{3} \zeta_{ij}\, \eta_{ij} + \mu_0^2 \,\langle \mathbb{D}\Big(y, \sum_{i,j=1}^{3} \boldsymbol{W}_0^{(ij)}(\boldsymbol{y})\, \zeta_{ij}\Big)\rangle_{Y_f} : \eta =$$

$$= \mu_0\, m\, \zeta : \eta + \mu_0^2 \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Y}_\zeta\big)\rangle_{Y_f} : \eta.$$

Будем использовать равенства

$$\int_Y \chi\, \mu_0\, \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(ij)}\big) : \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(kl)}\big) d\boldsymbol{y} + \int_Y \chi\, \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{W}_0^{(kl)}\big) : \mathbb{J}^{(ij)} d\boldsymbol{y} = 0$$

для $i, j = 1, 2, 3$, которые являются следствием (4.23). Умножим последнее на ζ_{ij} и η_{ij}. Суммирование по i, j, k, l приводит к соотношению

$$\mu_0\, \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Y}_\eta\big)\rangle_{Y_f} : \zeta + \mu_0^2\, \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Y}_\zeta\big) : \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Y}_\eta\big)\rangle_{Y_f} = 0, \tag{4.24}$$

то есть

$$\big(\mathfrak{N}_1 : \zeta\big) : \eta = \mu_0\, m\, \zeta : \eta + \mu_0^2 \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Y}_\zeta\big)\rangle_{Y_f} : \eta +$$
$$+ \mu_0^2\, \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Y}_\eta\big)\rangle_{Y_f} : \zeta + \mu_0^3\, \langle \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Y}_\zeta\big) : \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Y}_\eta\big)\rangle_{Y_f} = 0.$$

Таким образом, получим

$$\big(\mathfrak{N}_1 : \zeta\big) : \eta = \mu_0\, \langle \big(\mu_0\, \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\eta) + \zeta\big) : \big(\mu_0\, \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Y}_\zeta) + \eta\big)\rangle_{Y_f}.$$

Утверждение леммы следует из последнего соотношения.

Легко видеть, что

$$\big(\mathfrak{N}_1 : \zeta\big) : \eta = \big(\mathfrak{N}_1 : \eta\big) : \zeta.$$

Из последнего равенства и геометрии элементарной ячейки Y_f следует строгая положительная определенность тензора $\mathfrak{N}_1$. Пусть $\mathbb{Z} = (Z_{ij})$ есть симметричная матрица, такая что $\mathbb{Z} : \mathbb{Z} = 1$ и функция $\boldsymbol{Z} = \sum_{i,j=1}^3 \boldsymbol{W}_0^{(ij)} Z_{ij}$. Если допустить противное - получим: $(\mathfrak{N}_1 : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z} = 0$. Тогда

$$\mu_0\, \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}) + \mathbb{Z} = 0.$$

Последнее возможно, если $\boldsymbol{Z}$ – линейная функция переменной $\boldsymbol{y}$. С другой стороны, все линейные периодические функции в Y_f исчерпываются постоянными. Наконец, нормировка $\langle \boldsymbol{W}_0^{(ij)}\rangle_{Y_f} = 0$ доставляет равенство

$$\langle \boldsymbol{Z}\rangle_{Y_f} = \sum_{i,j=1}^{3} \langle \boldsymbol{W}_0^{(ij)}\rangle_{Y_f} Z_{ij} = 0,$$

что означает $\boldsymbol{Z} = 0$. Последнее невозможно, в силу того, что функции $\boldsymbol{W}_0^{(ij)}$ – линейно независимы. $\square$

Единственность усредненной начально-краевой задачи (4.1) – (4.9) доказывается аналогично доказательству, приведенному в лемме 2.3.

§4.3. Выводы

В настоящей главе выполнена процедура усреднения математической модели $\mathbf{M}_2$ для случая фильтрации жидкости с ограниченной величиной вязкости в поровом пространстве с упругим скелетом грунта: $0 < \mu_0 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$. Усреднение приводит к односкоростной макроскопической модели, которая представляет собой начально-краевую задачу (4.1) – (4.9) для нестационарной модели Стокса. Полученная начально-краевая задача однозначно разрешима.

Заключение

Перечислим основные результаты, проведенного исследования.

В первой главе диссертации сформулирована начально-краевая задача (1.6)–(1.16), описывающая процесс фильтрации вязкой жидкости из водоема в пористый грунт - $\mathbf{M}_1$. Задача (1.6) – (1.16) содержит гидродинамические уравнения Стокса для жидкости и уравнения Ламе линейной теории упругости для упругого скелета. Поставленная задача завершается условиями непрерывности перемещений и нормальных напряжений, однородными начальными условиями на перемещение и скорость, условиями Неймана и условием Дирихле. Как частный случай задачи $\mathbf{M}_1$, рассмотрена также, начально-краевая задача фильтрации жидкости из водоема в грунт, не учитывающая перемещение сплошной среды (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23), названная в работе моделью $\mathbf{M}_2$. Поставлена цель – построение предельных макроскопических моделей, зависящих от асимптотического поведения коэффициентов модели, отвечающих за свойства сплошной среды и доказательство их корректности. Введено предположение относительно периодичности порового пространства Ω_f области Ω. Благодаря чему, в уравнениях модели появляется малый параметр $0 < \varepsilon < 1$. В качестве малого параметра ε выбрано отношение среднего размера пор к характерному размеру рассматриваемой области. Сформулированы определения обобщенного решения и изучен вопрос существования и единственности начально-краевых задач (1.6) – (1.16) и (1.6), (1.8), (1.10) – (1.15), (1.21) – (1.23).

В последующих главах проводится усреднение начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений описывающих процесс фильтрации жидкости из водоема в пористый грунт. Для этого применяется стандартная техника гомогенизации в периодической структуре, основанная на методе двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга.

Во второй главе при фиксированном $\tau_0 > 0$ получены усредненные уравнения модели фильтрации жидкости из водоема в пористый грунт для случая слабо вязкой жидкости и абсолютно твердого скелета грунта. Установлено также, что при $\tau_0 \to 0$ усреденная задача приводится к системе, состоящей из уравнения гидравлики в водоеме Ω^0 и системы Дарси для скорости жидкой компоненты в области Ω.

В третьей главе диссертации получены усредненные системы линейных дифференциальных уравнений для случая фильтрации слабо вязкой жидкости в упругую твердую пористую среду: $\mu_0 = 0$, $0 < \lambda_0 < \infty$, $\mu_1 = \infty$.

В четвертой главе выполнена процедура усреднения начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс фильтрации жидкости из водоема в грунт, для случая фильтрации жидкости с ограниченной величиной вязкости в поровом пространстве с упругим скелетом грунта: $0 < \mu_0 < \infty$, $0 < \lambda_0 < \infty$. Усреднение приводит к односкоростной макроскопической модели, которая представляет собой начально-краевую задачу (4.1) – (4.9) для нестационарной модели Стокса.

Полученные усредненные начально-краевые задачи однозначно разрешимы.

Список основных обозначений

∘ R^n – евклидово пространство размерности n.

∘ Q_T – цилиндр $Q \times (0, T)$ в пространстве R^{n+1}:

$$Q_T = \{(x, t) \in R^{n+1} \mid x \in Q, t \in (0; T)\}.$$

∘ $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ – точка R^n.

Пусть $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_n)$, $\boldsymbol{v} = (u_1, ..., u_n) \in R^n$.

∘ $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ – скалярное произведение в R^n:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i.$$

∘ Пусть $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), ..., u_m(\boldsymbol{x}))$ – достаточно гладкая вектор-функция, $\boldsymbol{x} \in R^n$:

$$\nabla \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & . \; . \; . & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ . & . \; . & \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & . \; . \; . & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

В частности

$$\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad |\nabla \boldsymbol{u}|^2 = \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u}.$$

∘ $\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ – симметричный тензор второго ранга (матрица):

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} + \Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big)^{\top}\Big).$$

См. Овсянников ([32, с. 55])

∘ Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ два вектора, то матрица $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяется как

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

где $\mathbf{c}$ – произвольный вектор.

∘ Если B и C две матрицы, то $B \otimes C$ есть тензор четвертого ранга такой, что его свертка с произвольной матрицей A задается формулой

$$(B \otimes C) : A = B(C : A)$$

(см. Овсянников [32, с.16])

∘ Если A и B – квадратные матрицы, то $A : B \equiv tr(AB^T)$.

∘ $\mathbb{I}^{ij}$ – матрица, у которой единственный отличный от нуля элемент, равный единице, стоит на пересечении i-той строки и j-того столбца:

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i),$$

где $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ – ортонормированный базис.

∘ Для скалярных функций $u(\boldsymbol{x})$ и $v(\boldsymbol{x})$:

$$\nabla u : \nabla v = \nabla u \cdot \nabla v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

∘ $L_{q,r}(\Omega_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Ω_T функций с конечной нормой

$$\|u\|_{q,r,\Omega_T} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^q \, dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}}, \quad \text{причем } q \geqslant 1 \text{ и } r \geqslant 1.$$

∘ $W_q^l(\Omega)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов из $L_q(\Omega)$, имеющих обобщенные производные всех видов до порядка l включительно, суммируемые по Ω со степенью q. Норма в $W_q^l(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{q,\Omega}^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} \langle\langle u \rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)}, \ \text{ где } \ \langle\langle u \rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)} = \sum_{(j)} \|D_x^j u\|_{q,\Omega}.$$

Символ D_x^j означает любую производную $u(x)$ по x порядка j, а $\sum_{(j)}$ означает суммирование по всевозможным производным u порядка j.

∘ $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} (uv + \sum_k u_{x_k} v_{x_k}) \, d\boldsymbol{x} \, dt.$$

∘ $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Omega_T)$ — подпространство $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, состоящее из тех его элементов, которые обращаются в нуль на боковой поверхности цилиндра Ω_T.

∘ $L_2(0,T; L_2(\Omega)) \equiv L_2(\Omega_T), \quad L_2(0,T; W_2^1(\Omega)) \equiv W_2^{1,0}(\Omega_T)$.

∘ $\|f\|_{2,\Omega_T} = \left(\int_{\Omega_T} |f|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt \right)^{1/2}$ – норма f в пространстве $L_2(\Omega_T)$.

Список литературы

[1] *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence// SIAM J. Math. Anal. - 1992. - V. 23. - P. 1482–1518.

[2] *Allaire G.* Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium// Asymptotic Analysis 2. - 1989. - P. 203–222.

[3] *Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D.* An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. 1992. V. 18. P. 481Ч496.

[4] *Burridge R. and Keller J.B.* Poroelasticity equations derived from microstructure// Journal of Acoustic Society of America. - V. 70, No. 4, (1981) C. 1140 – 1146.

[5] *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structure. - Amsterdam: North Holland, 1978. - 700 c.

[6] *Biot M.* Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid // Journal of Applied Physics. – 1955. – V. 26. – P.182-185.

[7] *Biot M.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media// J. Acoust. Soc. Amer. 1962. V. 34, є 9. P. 1256-1264.

[8] *Buchanan J.L., Gilbert R.P.* Transition loss in the farfield for an ocean with a Biot sediment over an elastic substrate. ZAMM. - 1997. - V.77. - P. 121–135.

[9] *Buckingham M.J.* Seismic wave propagation in rocks and marine sediments: a new theoretical approach. in: A. Alippi, G.B. Cannelli (Eds.) - Underwater Acoustics. - 1998. - Vol. I. - CNR-IDAC. - Rome.

[10] *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics, Math. Pures et Appl., V. 64 (1985) pp. 31 - 75.

[11] *Clopeau Th., Ferrin J. L., Gilbert R. P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed// Part II, Mathematical and Computer Modelling. - 2001. - V.33. - P. 821–841.

[12] *Gilbert R.P., Lin J. Z.* Acoustic waves in shallow inhomogeneous oceans with a poro-elastic seabed, ZAMM 79 (4) (1997) pp. 1– 12.

[13] *Ladyzhenskaya O.A.* The mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York, 1969.

[14] *Ladyzhenskaya O.A.* The Boundary-Value Problems of Mathematical Physics, Springer, New York, 1985.

[15] *Lions J.-L.* Some methods in the Mathematical Analysis of Systems and Theire Control// Beijing, China: Science Press: New York: Cordon and Breach. - 1981.

[16] *Levy T.* Acoustic phenomena in elastic porous media, Mech. Res. Comm. 4 (4) (1977) pp. 253– 257.

[17] *Levy T.* Fluids in porous media and suspensions. In Homogenization Techniques for Composite Media, Lecture Notes In Physics. - Springer. - 1987. - Berlin. - 272 p.

[18] *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization.// SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20, 608–623.

[19] *Jäger W., Mikelić A.* On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impervious solid, in "Progress in PDE: the Metz surveys 3 eds. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin et I. Shafrir, Pitman reseach Notes in Mathematics, N 314, pp. 145– 161. Longman Scintific and Technical, London (1994).

[20] *Jäger W., Mikelić A.* On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid, Ann. Sc. norm. Super. Pisa, Cl, Sci.-Ser. IV, Vol. XXIII (1996), Fasc. 3 pp. 403– 465.

[21] *Jäger W., Mikelić A.* On the boundary conditions at the contact interface between two porous media, in "PDE, Theory and numerical solution eds. W. Jäger, J. Nečas, O. John, K. Najzar and J. Stará, Chapman and Hall/CRC Research notes in math., N 406, pp. 175– 186. CRC Press, London (1999).

[22] E. Sanchez-Palencia, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics, Vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1980.

[23] Sanchez-Hubert J. Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture// Math. Methods Appl. Sci. - 1980. - V. 2. - P. 1–18.

[24] *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics, SIAM J. Math. Anal., V. 21 (1990) pp. 1394– 1414.

[25] *Mikelić A., Paoli L.* Homogenization of the inviscid incompressible fluid flow trough a 2D porous medium. Proceedings of the AMS, V.17 (1999) pp. 2019– 2028.

[26] *Ferrin J. L., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluids, Math. Meth. Appl. Sci., V. 26 (2003) pp. 831– 859.

[27] *Lukkassen, D., Nguetseng, G., Wall P.* Two-scale convergence, Int. J. Pure and Appl. Math., V. 2. N 1 (2002) pp. 35– 86.

[28] *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Матем. сб. - 2000. - Т. 191, є 7. - С. 31–72.

[29] *Жиков В. В.* Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах// Изв. РАН. Серия матем. - 2002. - Т. 66, є 2. - С. 81–148.

[30] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. - 288 с.

[31] *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория вибраций. - М.: Мир, 1984. - 471 с.

[32] *Овсянников Л. В.* Введение в механику сплошных сред. Ч. I. - Новосибирск: НГУ, 1976. - 72 с.

[33] *Овсянников Л. В.* Введение в механику сплошных сред. Ч. I,II. - Новосибирск: НГУ, 1976.

[34] *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973. - 408 с.

[35] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967. - 736 с.

[36] *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 311 с.

[37] *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. - Киев: Наукова думка, 1974. - 279 с.

[38] *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. - М.: Наука, 1993. - 464 с.

[39] *Бахвалов Н. С. Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. - М.: Наука, 1984. - 352 с.

[40] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1972. - 496 с.

[41] *П.Я. Полубаринова-Кочина* П.Я. Полубаринова Ц Кочина Теория движения грунтовых вод, ГИТ-ТЛ, Москва, 1952.342.

[42] *Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А., Шамаев А. С.* Усреднение. Методы и приложения. - Новосибирск: Тамара Рожковская, Белая серия в математике и физике, 2007. - Т.3. - 264 с.

[43] *Terzaghi K.* Die Berechnung der Durchlassigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungsercheinungen// Sitzung berichte. Akademie der Wissenschaften, Wien Mathematiesch-Naturwissenschaftliche Klasse, – 1923. – V. 132. – є IIa. – P. 104-124.

[44] *A. Meirmanov* Mathematical models for poroelastic flows, Atlantis Press, Paris, 2013.

[45] *Meirmanov A.* A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization, SIAM J. Math. Anal. V. 40, No. 3 (2008) pp. 1272– 1289.

[46] *Meirmanov A.* Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 163;2 – P.111-172.

[47] *Мейрманов А. М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах// Сибирский математический журнал. - 2007. - Т. 48, є 3. - С. 64–67.

[48] *Мейрманов А. М.* Закон Дарси в неизотермических пористых средах// Сибирские Электронные Математические Известия. - 2007. - Т. 4. - С. 141–154. - http://semr.math.nsc.ru.

[49] *Мейрманов А. М.* Уравнения неизотермической фильтрации быстропротекающих процессов в упругих пористых средах// Прикладная математика и техническая физика. - 2008. - Т. 49, є 4. - С. 113–129.

[50] *Мейрманов А. М.* Определение акустических и фильтрационных характеристик термоупругих пористых сред: уравнения термопороупругости Био// Математический сборник. - 2008. - Т. 199, є 3. - С. 202-225.

[51] *Мейрманов А. М.* Неизотермическая фильтрация и сейсмоакустика в пористых грунтах: уравнения термовязкоупругости и уравнения Ламэ// Труды Математического Института им. В. А. Стеклова. - 2008. - Т. 261. - С. 210-219.

[52] *Мейрманов А. М.* Вывод уравнений сейсмоакустики и уравнений фильтрации в упругих пористых средах через усреднение периодических структур// Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 27. - М.: Изд-во МГУ, 2008. - С. 178–238.

[53] *Мейрманов А. М.* Применение многомасштабной сходимости для описания фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах// Научные ведомости БелГУ. Серия Математика, Физика. - 2008. - є 13 (53), Выпуск 15. - С. 73-78.

[54] *Мейрманов А. М.* О некоторых принципах моделирования задач фильтрации жидкости со свободными границами // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика, Физика. - 2008. - є 13 (53), Выпуск 15. - С. 58–72.

[55] *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. изд.2-е / М.: Наука, 1970.– 512с.

[56] *Meirmanov A.* Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media, Siberian Mathematical Journal, V. 48 (2007) pp. 519– 538.

[57] *Meirmanov A.* Homogenized models for filtration and for acoustic wave propagation in thermo-elastic porous media, Euro. Jnl. of Applied Mathematics, V. 19 (2008) pp. 259– 284.

[58] *Meirmanov A.* Double porosity models in incompressible poroelastic media, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, V. 20, No. 4 (2010) pp. 635– 659.

[59] *Meirmanov A., Sazhenkov S.A.* Generalized solutions to the linearized equations of thermoelastic solid and viscous thermofluid // Electron. J. Diff. Eqns. 2007. є 41. P. 1–29.

[60] *Жуковский Н.Е.* Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод (1889)// Собрание сочинений, т. III, Гостехиздат, 1949.

[61] *Кочин Н.Е.* К теории волн Коши–Пуассона// Тр. Мат. ин-та АН СССР, є 9, 1935. - С. 167–187.

[62] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика, Ч.1// Изд. 6. М., Физматгиз, - 583 с.

[63] *Ризенкампф Б.К.* Гидравлика грунтовых вод, Ч.3// Уч. зап. Саратовск. ун-та, є 5, С. 3–93.

Список публикаций автора по теме диссертации

[64] Гриценко С.А.,**Ерыгина Н.С.** Корректность модели фильтрации из водоема в грунт // Материалы Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». – Воронеж: ВГУ. – 2012. – С. 91 - 93.

[65] Гриценко С.А., **Ерыгина Н.С.** О модели вязкоупругой фильтрации // Материалы Международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» – Нальчик: ООО "Эльбрус". – 2012. – С. 74 - 77.

[66] **Ерыгина Н.С.** Упругий режим фильтрации жидкости из водоема в грунт // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Белгород: НИУ "БелГУ – 2013. – С. 74-75.

[67] Гриценко С.А., **Ерыгина Н.С.** Усреднение одной модели фильтрации // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Белгород: НИУ "БелГУ – 2013. – С. 59-60.

[68] **Ерыгина Н.С.** О фильтрации жидкости из водоема в пороупругий грунт // Материалы Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». – Воронеж: ВГУ. – 2013. – С. 99-101.

[69] Гриценко С.А., **Ерыгина Н.С.** О корректности задачи фильтрации из водоема в грунт: случай вязкоупругой фильтрации// Научные ведомости БелГУ, Серия Математика. Физика. – 2013. – є 5(148). Выпуск 30. – С. 142 - 151.

[70] **Ерыгина Н.С.** Макроскопические модели фильтрации жидкости из водоема в грунт// Научные ведомости БелГУ, Серия Математика. Физика. – 2014. – є 12(183). Выпуск 35. – С. 37 - 48.

[71] Meirmanov A.M., **Erygina N.**, Mukhambetzhanov S. Mathematical models of a liquid filtration from reservoirs// Electron. J. Diff. Equ. – Volume 2014. No. 49, 2014. – P. 1-13.

[72] **Ерыгина Н.С.** Математическая модель фильтрации вязкой жидкости// Материалы Четырнадцатой Всероссийской молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2015». – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2015. – Т. 52. 180 с.

[73] **Ерыгина Н.С.** Разрешимость математической модели фильтрации жидкости// Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2016». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 150-153.